Name		angemeldet	eingetragen
Vorname			
Matr. Nr.			

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Summe	Note
maximal	**10**	**18**	**18**	**46**	
erreicht					

Hinweis. Viel Erfolg!

Übersicht über die Aufgaben

AUFGABE 1
Man zeige durch Anwendung des Induktionssatzes, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3) = 2 \cdot n^2 - n$$

AUFGABE 2
Seien die folgenden drei Aussagen gegeben.

i) Für alle Teilmengen A, B, C der natürlichen Zahlen gilt, dass die Vereinigung aus der Differenz von A mit B und der Differenz von A mit C gleich der Differenz von A mit der Vereinigung aus B und C ist.
Hinweis. Für Mengen X, Y sagt man statt „X ohne Y“ auch „Differenz von X mit Y“

ii) Für jede von 0 und 1 verschiedene reelle Zahl a gibt es eine reelle Zahl x so, dass die Summe ihrer Kehrwerte den Wert 1 hat.

iii) Wenn zwei ganze Zahlen a, b dieselbe Parität haben, dann haben auch ihr Produkt und das Quadrat ihrer Summe dieselbe Parität.

a) Man formalisiere die Aussagen *i*), *ii*) und *iii*).

b) Man beweise oder widerlege die Aussagen *i*), *ii*) und *iii*).

AUFGABE 3
Sei S eine nichtleere Teilmenge der ganzen Zahlen, also $S \subseteq \mathbb{Z}$. Auf der Menge S wird nun eine Relation R definiert, und zwar durch:

$$R := \{(x, y) \in S \times S \mid \exists q \in \mathbb{Z}\colon 3q = x + 2y\} = \{(x, y) \in S \times S \mid \ 3 \mid x + 2y\}$$

Offenbar stehen zwei ganze Zahlen $x, y \in S$ genau dann in Relation zueinander – also $x\,R\,y$ –, wenn 3 ein Teiler der Summe $x + 2y$ ist.

a) Sei $S := \{-7, -6, -2, 0, 1, 4, 5, 7\}$.

i) Man zeige, dass $(1, 4), (4, 1), (7, 7) \in R$ gilt.
ii) Man gebe die Äquivalenzklasse von 0, also die Menge $[0]$ an.
iii) Man gebe alle verschiedenen Äquivalenzklassen von der Menge S bzgl. der Relation R an.
iv) Man gebe eine nichtleere Teilmenge T von S so an, dass je zwei Elemente von T nicht in Relation zueinander stehen.

b) Man zeige allgemein (d.h. unabhängig von der konkreten Menge S in Teilaufgabe a)), dass R für jede nichtleere Menge S eine Äquivalenzrelation auf S ist.

AUFGABE 1

Man zeige durch Anwendung des Induktionssatzes, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3) = 2 \cdot n^2 - n$$

Kladde

Reinschrift

AUFGABE 2

Seien die folgenden drei Aussagen gegeben.

i) Für alle Teilmengen A, B, C der natürlichen Zahlen gilt, dass die Vereinigung aus der Differenz von A mit B und der Differenz von A mit C gleich der Differenz von A mit der Vereinigung aus B und C ist.

Hinweis. Für Mengen X, Y sagt man statt „X ohne Y“ auch „Differenz von X mit Y“

ii) Für jede von 0 und 1 verschiedene reelle Zahl a gibt es eine reelle Zahl x so, dass die Summe ihrer Kehrwerte den Wert 1 hat.

iii) Wenn zwei ganze Zahlen a, b dieselbe Parität haben, dann haben auch ihr Produkt und das Quadrat ihrer Summe dieselbe Parität.

a) Man formalisiere die Aussagen *i*), *ii*) und *iii*).

b) Man beweise oder widerlege die Aussagen *i*), *ii*) und *iii*).

Kladde

Reinschrift

AUFGABE 3

Sei S eine nichtleere Teilmenge der ganzen Zahlen, also $S \subseteq \mathbb{Z}$. Auf der Menge S wird nun eine Relation R definiert, und zwar durch:

$$R := \{(x, y) \in S \times S \mid \exists q \in \mathbb{Z}\colon 3q = x + 2y\} = \{(x, y) \in S \times S \mid \quad 3 \mid x + 2y\}$$

Offenbar stehen zwei ganze Zahlen $x, y \in S$ genau dann in Relation zueinander – also $x\,R\,y$ –, wenn 3 ein Teiler der Summe $x + 2y$ ist.

a) Sei $S := \{-7, -6, -2, 0, 1, 4, 5, 7\}$.

i) Man zeige, dass $(1, 4), (4, 1), (7, 7) \in R$ gilt.

ii) Man gebe die Äquivalenzklasse von 0, also die Menge $[0]$ an.

iii) Man gebe alle verschiedenen Äquivalenzklassen von der Menge S bzgl. der Relation R an.

iv) Man gebe eine nichtleere Teilmenge T von S so an, dass je zwei Elemente von T nicht in Relation zueinander stehen.

b) Man zeige allgemein (d.h. unabhängig von der konkreten Menge S in Teilaufgabe a)), dass R für jede nichtleere Menge S eine Äquivalenzrelation auf S ist.

Kladde

Reinschrift

Reinschrift

Kladde

Kladde

Kladde

Kladde