ÜBUNG 5

AUFGABE 1
Man formalisiere und negiere die folgenden Aussagen und gebe den Wahrheitswert an.

a) Das Quadrat einer natürlichen Zahl ist stets eine gerade Zahl.

b) Alle natürlichen Zahlen lassen bei Division durch 3 den Rest 0 oder den Rest 1.

c) Die Summe zweier gerader Zahlen und auch die Summe zweier ungerader nat. Zahlen ist stets eine gerade Zahl.

AUFGABE 2
Man gebe an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z} : y > x$
2. $\exists y \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{Z} : y > x$
3. $\exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z} : y < x$
4. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x^2 = y$
5. $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = y$
6. $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} : x + y = 0$
7. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : x + y = 0$
8. $\forall x : P(x) \Rightarrow \exists x : P(x)$
9. $\exists x : P(x) \Rightarrow \forall x : P(x)$

AUFGABE 3
Man gebe für jede der angegebenen Mengen M_i die jeweilige Potenzmenge $\mathcal{P}(M_i)$ und deren Mächtigkeit, also $|\mathcal{P}(M_i)|$ an.

i) $M_1 = \{\emptyset, 1, \{c\}\}$

ii) $M_2 = \{\mathcal{P}(\{5\})\}$

AUFGABE 4
Sei $\mathcal{U} := \{1, 2, 3\}$ eine gegebene Universalmenge. Sei $A := \{1, 2\}$, $B := \{2, 3\}$ und $C := \{1, 3\}$. Man bestimme die folgenden Mengen

i) $(A \cup B) \setminus (B \cap C)$

ii) $(\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)) \setminus (\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C))$

iii) $\overline{A}$

iv) $\overline{B \cup C}$

AUFGABE 5

i) Für $A := \{1, \{1\}, \{\{1\}\}\}$ bestimme man $A \times A$.

ii) Für $A := \{a, b\}$ bestimme man $\mathcal{P}(A) \times A$ und $A \times \mathcal{P}(A)$.

iii) Man skizziere die Teilmenge $K := \{k \mid \exists x, y \in \mathbb{R} : k = (x, y) \wedge x^2 + y^2 = 4\}$ von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

AUFGABE 6

Sei $A := \{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Man gebe das kleinste natürliche $k \in \mathbb{N}$ und Teilmengen A_1, A_2, A_3 von A so an, dass für alle natürlichen i, j mit $1 \leq i < j \leq 3$ gilt:

$$| A_i \setminus A_j |=| A_j \setminus A_i |=| i - j |$$

AUFGABE [Diproche]

In dieser Aufgabe soll ein gegebener aussagenlogischer Ausdruck mit anderen Junktoren äquivalent dargestellt werden, zB kann der Ausdruck A->B nur mit den Junktoren Negation (∼) und Disjunktion (v) durch ∼AvB äquivalent ausgedrückt werden.

a) `https://eufmath.uni-flensburg.de/reformulateprop/ref1`

b) `https://eufmath.uni-flensburg.de/reformulateprop/ref2`

c) `https://eufmath.uni-flensburg.de/reformulateprop/ref3`

d) `https://eufmath.uni-flensburg.de/reformulateprop/ref4`

e) `https://eufmath.uni-flensburg.de/reformulateprop/ref5`

f) `https://eufmath.uni-flensburg.de/reformulateprop/ref6`

g) `https://eufmath.uni-flensburg.de/reformulateprop/ref7`

h) `https://eufmath.uni-flensburg.de/reformulateprop/ref8`

AUFGABE [Diproche]

Ziel des Spieles ist es, eine quantorenlogische Formel anzugeben, die genau auf die gelb gefärbten Felder zutrifft. Eine Formel F „beschreibt“ die Menge M von Quadraten, wenn $M = \{x \mid F(x)\}$ ist. Es stehen folgende Grundrelationen zur Verfügung:

i) nachbar(x,y) ist genau dann wahr, wenn x und y eine gemeinsame Kante besitzen.

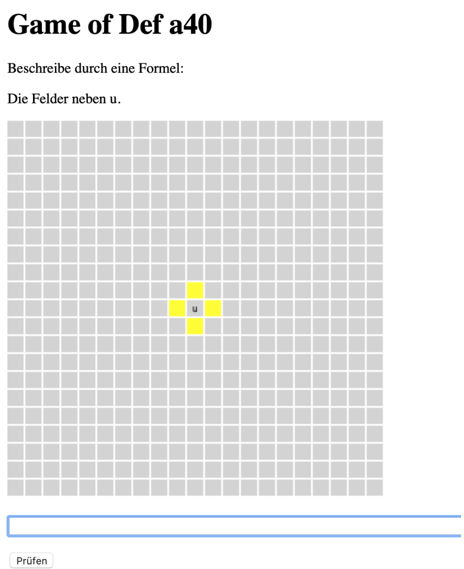
ii) links(x,y) ist genau dann wahr, wenn sich y links von x befindet.

iii) rechts(x,y) ist genau dann wahr, wenn sich y rechts von x befindet.

iv) ueber(x,y) ist genau dann wahr, wenn sich y ueber x befindet.

v) unter(x,y) ist genau dann wahr, wenn sich y unter x befindet.

vi) x=y ist genau dann wahr, wenn x und y dasselbe Quadrat bezeichnen.



Außerdem ist das mittlere Feld stets mit u bezeichnet; manchmal sind auch noch andere Felder schon zu Beginn benannt. Formeln können mit & (und), v (oder), -> (Implikation) und <-> (Äquivalenz) verknüpft werden. Auf äußere Klammern achten!

Außerdem kann eine Formel F mit ∼F negiert werden. Schließlich kann man mit Ax:F eine allquantifizierte und mit Ex:F eine existenzquantifizierte Aussage gebildet werden.
Dabei ist darauf zu achten, nicht mehr als einen Quantorenwechsel („Ax:Ey:“ bzw. „Ex:Ay:“) einzugeben, also „Ax:Ey:Az:“ und „Ex:Ay:Ez:“ ist zu vermeiden (es geht nur um Schachtelung von Quantoren; die Verbindung mehrere Formeln mit Quantorenwechseln durch aussagenlogische Junktoren ist harmlos); für solche Formeln funktioniert die Auswertung derzeit noch nicht (sie dauert zu lange und wird daher vorzeitig abgebrochen). Alle Level sind natürlich mit dieser Einschränkung lösbar.
Wenn man auf „prüfen“ klickt, werden die richtig beschriebenen Quadrate grün markiert, diejenigen, auf die die eingegebene Formel zutrifft, obwohl sie nicht zur Menge gehören, werden rot gefärbt und diejenigen, die zur Menge gehören, auf die die Beschreibung aber nicht zutrifft, bleiben gelb. Ziel ist es also, dass alle gelben Quadrate grün werden.
Nun zu den Aufgaben.

a) `https://eufmath.uni-flensburg.de/gameofdef/a1`
b) `https://eufmath.uni-flensburg.de/gameofdef/a4`
c) `https://eufmath.uni-flensburg.de/gameofdef/a40`
d) `https://eufmath.uni-flensburg.de/gameofdef/a2`
e) `https://eufmath.uni-flensburg.de/gameofdef/a41`
f) `https://eufmath.uni-flensburg.de/gameofdef/a11`
g) `https://eufmath.uni-flensburg.de/gameofdef/a3`
h) `https://eufmath.uni-flensburg.de/gameofdef/a0`
i) `https://eufmath.uni-flensburg.de/gameofdef/a10`
j) `https://eufmath.uni-flensburg.de/gameofdef/a5`