ÜBUNG 8

Abgabe der Bearbeitungen am Freitag, den 17. November bis 10 Uhr

AUFGABE 1

Man beweise

a) Für alle $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ gilt: Wenn $\frac{x^2+1}{x} \leq 1$, dann ist $\frac{x^2+2}{x} \leq 2$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $n + \frac{1}{n} < 2$, dann ist $n^2 + \frac{1}{n^2} < 4$.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn $0 < x < 1$, dann ist $x^2 - 2x + 2 \neq 0$.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $|n-1| + |n+1| \leq 1$, dann $\left|n^2 - 1\right| \leq 4$.

AUFGABE 2

Seien A, B, C Mengen.

Die folgende Teilaufgabe kann auch mit Diproche bearbeitet werden, und zwar **hier**.

a) Man zeige mit Hilfe von Aufgabe 1:

$$(A^c \cup (B^c \cap C))^c = (A \cap B) \cup (A \setminus C)$$

Auch diese Teilaufgabe kann mit Diproche bearbeitet werden, und zwar **hier**.

b) Man veranschauliche (z.B. mit geeignet gewählten reellen Intervallen) und zeige die folgende Aussage:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

c) Für $B \subseteq A$ zeige man:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = A \setminus C \;\Leftrightarrow\; A \cap C \subseteq B$$

AUFGABE 3

Seien $A = \{0, 1, 2\}$ und $B = \{4, 5, 6\}$ Teilmengen der Menge $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Man formuliere und zeige anschließend:

Wenn für eine natürliche Zahl $n \in U$ der Quotient aus $n \cdot (n^2 - 3n + 2)$ und 6 eine gerade Zahl ist, dann liegt n in der Vereinigungsmenge von A und B.

AUFGABE 4

Man beweise

a) Seien a, b ganze Zahlen mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$.
Wenn $a \mid b$ und $b \mid a$, dann ist $a = b$ oder $a = -b$.

b) Seien x, y ganze Zahlen. Wenn $3 \nmid x$ und $3 \nmid y$, dann gilt $3 \mid (x^2 - y^2)$.

c) Sei m eine ganze Zahl. Es gilt $2 \mid m^4 - 3$ genau dann, wenn $4 \mid m^2 + 3$.

Es folgen zwei Aufgaben, die auch mit Diproche zu lösen sind.

d) **hier**.

e) **hier**.

Auf Wunsch folgt nun eine alte Klausuraufgabe:

AUFGABE

Gegeben sei folgende Aussage

$$(*) \quad \forall u \in 2\mathbb{Z}-1 \; \exists k \in \mathbb{Z} : u^2 = 8k+1$$

a) Man gebe für $u = -1$ ein passendes k an.

b) Man gebe für $u = 13$ ein passenden k an.

c) Man beweise die Aussage $(*)$.

d) Gilt die Aussage $(*)$ auch, wenn man die Quantoren vertauscht, also $\exists k \in \mathbb{Z} \; \forall u \in 2\mathbb{Z}-1 \; : u^2 = 8k+1$? Man begründe seine Entscheidung.