Übung 10

Abgabe der Bearbeitungen am Freitag, den 26. Mai bis 12 Uhr

Aufgabe 1

Man zeige die Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, d.h. Für alle reellen Zahlen a, b mit $a < b$ gibt es eine ganze Zahl m und eine natürliche Zahl n mit

$$a < \frac{m}{n} < b$$

Aufgabe 2

Obwohl wir schon längs (spätestens seit der neunten Klasse) die Mengengleichheit

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

verinnerlicht haben, wollen wir diese Existenz von Quadratwurzeln beweisen und zwar durch die folgende

Behauptung. Sei $T := \{t \in \mathbb{R} \mid t^2 < 2\}$. Dann erfüllt $w := \sup T$ die Gleichung $x^2 = 2$.

(Damit haben wir die Existenz einer Lösung dieser Gleichung bewiesen und könnten mit Fug und Recht definieren $\sqrt{2} := \sup T$.)
Einige Hinweise zum
Beweis.
Es ist zu zeigen: $w^2 = 2$. Führen Sie getrennt voneinander die beiden Annahmen $w^2 < 2$ und $w^2 > 2$ zu einem Widerspruch. Bei der ersten Annahme kann folgende Abschätzung hilfreich sein, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$\left(w + \frac{1}{n}\right)^2 = w^2 + 2 \cdot \frac{w}{n} + \frac{1}{n^2} < w^2 + 2 \cdot \frac{w}{n} + \frac{1}{n} = w^2 + \frac{2w+1}{n}$$

Nach Archimedes finden Sie stets ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit (Zähler und Nenner sind positiv! (warum?))

$$\frac{1}{n_0} < \frac{2 - w^2}{2w + 1}$$

Insgesamt finden Sie damit ein Element aus T (welches?) und damit einen Widerspruch zur Eigenschaft der oberen Schranke von w.
Um $w^2 > 2$ zu widerlegen, hilft die folgende Abschätzung

$$\left(w - \frac{1}{n}\right)^2 > w^2 - \frac{2w}{n}$$

Aufgabe 3

Man beweise:

a) Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} := \{\frac{n}{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1.

b) Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} := \{\frac{1}{n^2+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0.

Aufgabe 4
Für welche Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\exists a \; \forall \epsilon > 0 \; \forall n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 : \; |a_n - a| < \epsilon \; ?$$

Aufgabe 5
Man analysiere und repariere den nachfolgenden Beweis zur

Behauptung 0.1. *Die Folge* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \left\{ \frac{2n}{3n+5} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* $\frac{2}{3}$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Wähle $n_0 := \left\lceil \frac{10}{9\epsilon} - \frac{5}{3} \right\rceil$. Sei $n > n_0$. Dann gilt $\frac{10}{9n+15} < \epsilon$. Damit gilt $\left| \frac{2n}{3n+5} - \frac{2}{3} \right| = \frac{10}{9n+15} < \epsilon$.

Hinweis. Setzen Sie konkrete Zahlen für das ϵ ein und schauen Sie dann auf die Wahl des von ϵ abhängigen n_0.