ÜBUNG 2

In der Vorlesung wurde besprochen (bzw. wird jetzt Montag wiederholt), wie unsere gewohnten „Rechengesetze bzw. Rechenregeln“ aus der Schule mit den Eigenschaften einer Gruppe zusammenhängen, dies aber ohne Torten, Wasserstände, Waagen o.ä.
Wir wollen nun ausschließlich mit Hilfe unserer Definitionen und Eigenschaften, die wir an Gruppen gestellt haben, viele bekannte Regeln aus der Schule herleiten. Bevor wir uns an den Speisetisch der „Regeln“ setzen, müssen wir Besteck und einige harmlose Ingredienzien, meist Bezeichnungs- und Abkürzungskonventionen bereitstellen, um im Bild zu bleiben (siehe unten).
Ihnen wird - wie erwähnt - dabei auffallen, dass wir einige dieser Regeln schon in abstrakteren Situationen also allgemein in einer Gruppe $(G, *)$ bewiesen haben. Ganz bewusst sollen sie sich diese (in einem „anderen Gewand“) nochmals klarmachen und unter den neuen Begebenheiten beweisen.
Die akribische Bearbeitung dieses Übungsblattes setzt sich zum Ziel, eine Bewusstseinserhellung bei ihnen zu erreichen (neudeutsch würde man sagen, eine kompetenzorientierte kognitive Fähigkeitserweiterung neuronaler Netzstrukturen), nämlich, dass die gesamte (und wirklich die GESAMTE) Buchstabenrechung in der Schule mit (von) ganz wenigen, elementaren und einsichtigen Grundregeln auskommt (abhängt).
Wir haben bereits festgestellt und nehmen ab nun dieses als Grundlage des Übungsblattes, dass $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppen sind. Wir wissen, dass die darin involvierten Verknüpfungen „$+$“ und „$\cdot$“ auch in gemeinsamen Kontexten in der Schule vorkommen, so zum Beispiel beim Vereinfachen des Terms $(x + y) \cdot (x + 2y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.
Das Zusammenspiel dieser Verknüpfungen müssen wir organisieren, dazu definieren wir, wie am Montag in der Vorlesung kurz besprochen wird, eine neue Grundregel, nämlich (**G5**).
Wie definieren:

Definition 0.1 (Distributivgesetz)**.** (**G5**) $(\mathbb{R}, +)$ *und* $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ *erfüllen das Distributivgesetz, d.h.*

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \;:\; a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Es folgen weitere übliche Definitionen bzw. Abkürzungen

Definition 0.2 (Bezeichnungen für neutrale und inverse Elemente)**.** *Wir definieren*

i) Das neutrale Element e in $(\mathbb{R}, +)$ bezeichnen wir mit 0, also $e = 0$.

ii) Das neutrale Element e in $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ bezeichnen wir mit 1, also $e = 1$.

iii) Die zu a inversen Elemente a' in $(\mathbb{R}, +)$ bezeichnen wir mit $(-a)$, also $a' = (-a)$.

iv) Die zu a inversen Elemente a' in $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ bezeichnen wir mit a^{-1}, also $a' = a^{-1}$.

Die letzten Abkürzungen definieren wir mit Hilfe von

Definition 0.3 (abkürzende Bezeichnungen)**.** *Wir definieren für alle reellen Zahlen a, b, c*

i) $-a := (-a)$

ii) $a - b := a + (-b)$ *(Das Minus als Rechenzeichen ist erschaffen, juhu!)*

iii) Für $b \neq 0$ *gilt* $\dfrac{a}{b} := a \cdot b^{-1} = a \cdot \dfrac{1}{b}$
(Ein Bruch ist erschaffen, oh je! Erinnern Sie sich an die heutige Vorlesung?)

iv) $a^2 := a \cdot a$. *(Exponenten sind erschaffen, juhu!)*

v) $a + b + c := a + (b + c) = (a + b) + c$.

vi) $abc := a \cdot b \cdot c := a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

Es folgen nun die angekündigten Aufgaben, wobei Begründungen jeweils zu dokumentieren sind, z.B. in der Form

$$\ldots \underset{\text{wegen}(G1)\text{in}(\mathbb{R},+)}{=} \ldots$$

AUFGABE 1
Man beweise:

(a) Die neutralen Elemente in $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ sind eindeutig bestimmt.

(b) Die zu a inversen Elemente in $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ sind eindeutig bestimmt.

AUFGABE 2 (Invertierungen)
Man beweise:

(a) Für alle reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ gilt: $(-(-a)) = a$.

(b) Für alle reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt: $((a^{-1})^{-1}) = a$.

AUFGABE 3 (Kürzungen)
Man beweise:

(a) Für alle reellen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $a + b = a + c$ folgt $b = c$.

(b) Für alle reellen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ gilt: Aus $a \cdot b = a \cdot c$ folgt $b = c$.

AUFGABE 4
Man beweise:

(a) Für alle reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ gilt: $a \cdot 0 = 0$.

(b) Für alle reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ gilt: $(-1) \cdot a = -a$.

AUFGABE 5 (Gleichungen)
Man beweise:

(a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $a + x = b$ genau eine Lösung, nämlich $x := b - a$.

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ hat die Gleichung $a \cdot x$ =b genau eine Lösung, nämlich $x := \frac{b}{a}$.

AUFGABE 6 (Vorzeichenregeln)
Man beweise: Für alle reellen Zahlen a, b gilt:

(a) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

(b) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

AUFGABE 7 (Annulierungsregel)
Man beweise: Für alle reellen Zahlen a, b gilt:

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0.$$

AUFGABE 8 (Bruchrechenregeln)
Man beweise: Für alle reellen Zahlen a, b, c, d mit $b, d \neq 0$ gilt:

(a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

(b) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$.

(c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

(d) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$, $c \neq 0$.