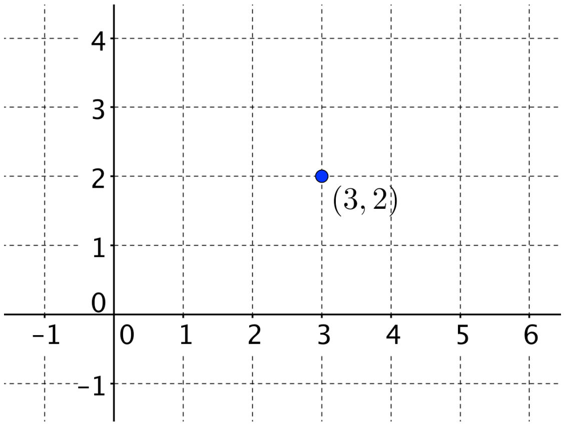
ÜBUNG 5

AUFGABE 1

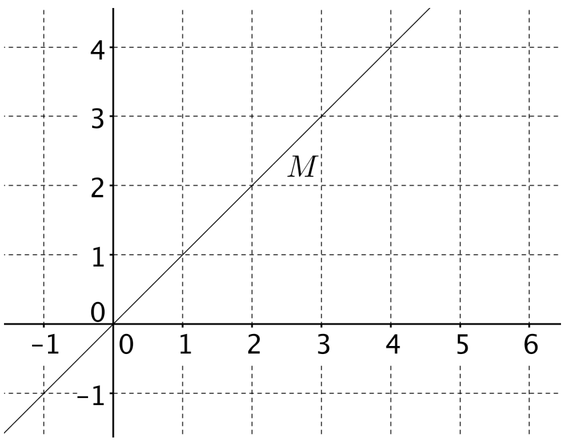
Die Veranschaulichung des kartesischen Produkts

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

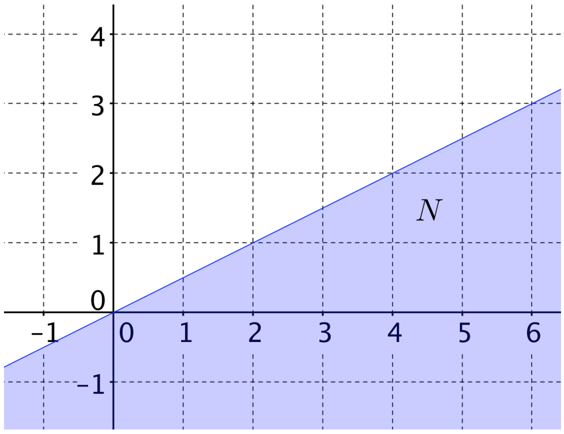
(auch kurz $\mathbb{R}^2$ (gesprochen „$\mathbb{R}$-zwei")) wurde in der Vorlesung in einem kartesischen Koordinatensystem von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vorgenommen und diskutiert. Jedes Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kann dort als *Punkt* mit einer x- und einer y-Koordinate eingezeichnet werden. Im Bild ist das Paar $(3, 2)$ visualisiert (in der Sprache der Funktionen: der Stelle 3 wird der Wert 2 zugeordnet). Natürlich kann auch jedem Punkt der Ebene nach Festlegung zweier nichtparalleler Geraden durch senkrechte Projektionen auf den beiden Geraden in eindeutiger Weise zwei reelle Zahlen zugeordnet werden.



Man kann natürlich auch Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ visualisieren. Machen Sie sich klar, dass im folgenden Bild eine Visualisierung der Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ dargestellt ist.



Machen Sie sich nun klar, dass das folgende Bild eine Visualisierung der Menge $N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq \frac{1}{2}x\}$ zeigt.



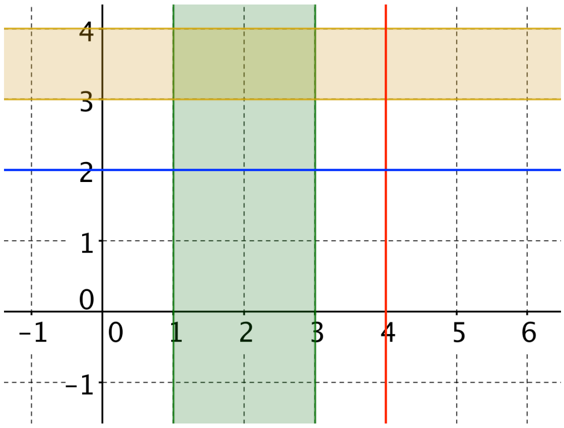
Spezielle Teilmengen der reellen Zahlen sind *Intervalle*. Wir definieren

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

für beliebige reelle Zahlen a, b mit $a \leq b$ und nennen $[a, b]$ das *abgeschlossene Intervall mit der linken Intervallgrenze* a *und der rechten Intervallgrenze* b. Machen Sie sich klar, wie die Veranschaulichung eines Intervalls auf der Zahlengeraden aussieht.

a) Identifizieren Sie die folgenden Mengen. Dabei ist zu beachten, dass einige Mengen auf verschiedene Arten ausgedrückt wurden.

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2\}$
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \wedge 3 \leq y \leq 4\}$
- $C = \mathbb{R} \times \{2\}$.
- $D = [1, 3] \times \mathbb{R}$
- $E = \mathbb{R} \times [3, 4]$
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 4\}$
- $G = [1, 3] \times [3, 4]$
- $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 \leq y \leq 4\}$
- $I = \{4\} \times \mathbb{R}$.



b) Visualisieren Sie die folgenden Mengen in einem Koordinatensystem:

(i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 4\}$
(ii) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 4 = 4y\}$
(iii) $C = \{0\} \times \mathbb{R}$
(iv) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -3\}$
(v) $E = \emptyset \times \mathbb{R}$
(vi) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$
(vii) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = 2\}$

c) Gegeben seien nun folgende Mengen:

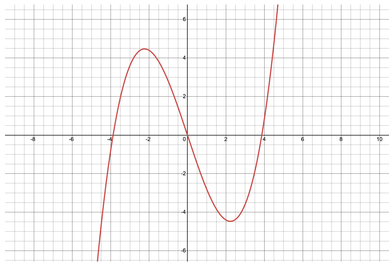
- $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$
- $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 5 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$
- $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq y \leq 3 \wedge y - 2 \leq x \leq 4 - y\}$
- $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq y \leq 3 \wedge 4 - y \leq x \leq 7 - y\}$

(i) Bestimmen und skizzieren Sie $A \cup B \cup C \cup D$ und $A \cap B \cap C \cap D$.
(ii) Bestimmen Sie nun $A \cup B \cup C \cup D$ und $A \cap B \cap C \cap D$ für den Fall, dass $x, y \in \mathbb{N}$ sind.

AUFGABE 2

In dieser Aufgabe möchten wir Funktionen graphisch darstellen. Zur Visualisierung der Funktionen und ihrer Graphen gibt es verschiedene Applikationen, wir holen die Webseite `desmos`.

Zu der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{5} \cdot x^3 - 3 \cdot x$ liefert `desmos` zum Beispiel das folgende Bild.



Aus dem Bild lesen wir verschiedene Eigenschaften ab: die Funktion f ist nicht streng monoton steigend, es gilt $f(0) = 0$, der Punkt $(0, 0)$ ist eine Art Symmetriezentrum des Graphen der Funktion, der Graph schneidet die x-Achse dreimal, aber die y-Achse nur einmal, der Wert $f(5)$ sprengt den Rahmen, etc.

d) Rekonstruieren Sie das Bild, indem Sie auf den `Link` klicken.

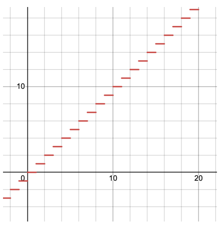
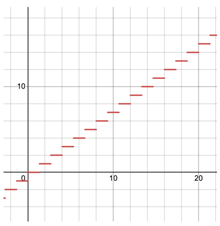
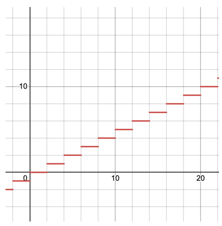
e) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ und $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x} \qquad \text{und} \qquad h(x) = \frac{10}{|x \cdot (x+3)| + |(x+1) \cdot (x+2)|}$$

sowie zweier selbstgewählter Funktionen. Geben Sie anhand der Skizzen für jeden der vier Graphen drei charakteristische Merkmale an.

Manchmal machen wir eine Funktion von einem Parameter abhängig, um eine *Funktionenvielfalt* zu bekommen. (Manche Menschen sprechen auch von einer *Funktionenschar* oder einer *Parameterfunktion*.)

Zum Beispiel gibt es für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \lfloor ax \rfloor$, wobei die Klammern mit den Füßen die Abrundungsfunktion bedeuten, die wir im letzten Semester kennengelernt haben. Die Graphen für $a = 1$, $a = 0{,}75$ und $a = 0{,}5$ sehen wie folgt aus:

Aus der Folge der Bilder lesen wir verschiedene Merkmale ab: die Funktionsgraphen sind treppenförmig, die Höhe einer Stufe ist immer 1, aber die Breite variiert mit dem Parameter a, die Funktion ist mononoton steigend, falls $a > 0$, aber niemals streng monoton steigend, etc.

f) Rekonstruieren Sie die Animation, indem Sie auf den `Link` klicken.

g) Animieren Sie die Funktionenvielfalt $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{1}{10}x^3 + ax^2$ für Werte des Parameters a von -5 bis 5. Geben Sie zudem drei charakteristische Merkmale dieser Funktionenschar an.

h) Animieren Sie die Funktionenvielfalt $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = x - a\sqrt{x}$ für Werte des Parameters a von 2 bis 4. Geben Sie zudem drei charakteristische Merkmale dieser Funktionenschar an.

i) Erfinden Sie eine eigene Funktionenvielfalt.

Aufgabe 3

Manche Funktionen sind nicht streng monoton steigend, wären es aber, wenn man den Definitionsbereich einschränken würde.

Wir versuchen, das Phänomen zu formalisieren. Zu diesem Zweck sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit dem Definitionsbereich D. Ferner sei $I \subseteq D$ eine Teilmenge von D, zum Beispiel ein Intervall. Wir sagen nun, die Funktion f ist *streng monoton steigend auf* I, falls für alle Elemente $x_1, x_2 \in I$ gilt:

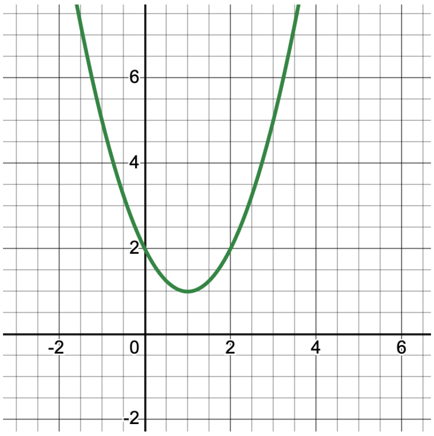
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

In Analogie sagen wir, die Funktion ist *streng monoton fallend auf* I, falls für alle Elemente $x_1, x_2 \in I$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \underline{\hspace{6cm}}.$$

a) Füllen Sie die Lücke in der obigen Definition.

Zum Beispiel betrachten wir die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 2x + 2$. Die Funktion ist nicht streng monoton steigend, denn es gilt $f(0) > f(1)$.



Sie ist aber streng monoton steigend auf dem Intervall $(1, \infty)$, wie der folgende Beweis zeigt:

- Es seien $x_1, x_2 \in (1, \infty)$ zwei reelle Zahlen größer als 1.
- Angenommen, es gelte $x_1 < x_2$.
- Dann ist die Differenz der Funktionswerte

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \left(x_2^2 - 2x_2 + 2\right) - \left(x_1^2 - 2x_1 + 2\right) \\ &= x_2^2 - x_1^2 - 2x_2 + 2x_1 \\ &= (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) - 2(x_2 - x_1) \\ &= (x_2 + x_1 - 2)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

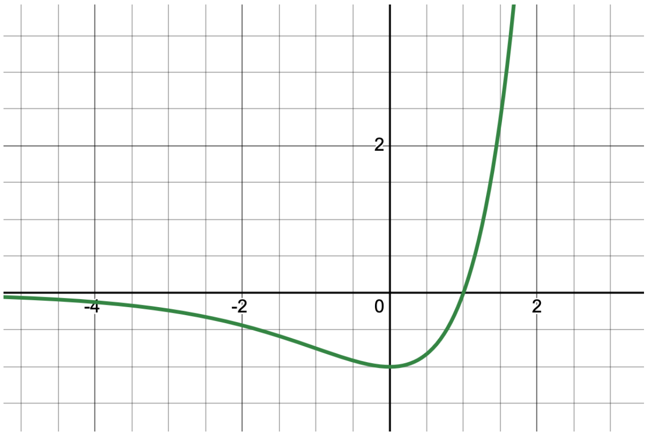
  dank der dritten binomischen Formel.
- Aus der Annahme $x_1, x_2 \in (1, \infty)$ folgt $x_2 + x_1 - 2 > 1 + 1 - 2 = 0$; aus der Voraussetzung $x_1 < x_2$ folgt $x_2 - x_1 > 0$. Damit ist $f(x_2) - f(x_1)$ ein Produkt aus zwei positiven Faktoren, also selbst positiv.
- Aus $f(x_2) - f(x_1) > 0$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$. $\square$

Nun laden wir die Studierenden ein, in anderen Situationen eigenständige Monotoniebeweise zu führen.

b) Zeigen Sie, dass die obige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 2x + 2$ auf dem Intervall $(-\infty, 1)$ streng monoton fallend ist.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x + \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $(1, \infty)$ streng monoton steigend ist.

d) Es sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $h(x) = 4^x - 2 \cdot 2^x$.



Nennen Sie eine Menge I von reellen Zahlen und zeigen Sie, dass die Funktion h auf I streng monoton steigend ist.

AUFGABE 4

Lesevergnügen. Wenn Sie ein Interesse an einer didaktischen Veröffentlichung zum Thema Funktionen haben, dann empfehlen wir Ihnen das folgende Dokument von Herrn Vollrath. Es ist zwar schon ein wenig älter, aber noch immer sehr aktuell.
VOLLRATH, H.-J.: Funktionales Denken. In: Journal für Mathematikdidaktik 10 (1989)
http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/vollrath/papers/052.pdf

Ein durchsichtiger Behälter wird (gleichmäßig) mit Wasser gefüllt. In den folgenden drei Fällen beobachtet man jeweils, wie der Wasserstand in Abhängigkeit von der Zeit steigt:

- **Fall A:** Der Behälter hat die Form eines **Zylinders**.
- **Fall B:** Der Behälter hat die Form eines **umgedrehten Kegels**.
- **Fall C:** Der Behälter hat die Form einer **Kugel**.

a) Zeichnen Sie für jeden Fall eine Skizze des Behälters.

b) Beschreiben Sie qualitativ, wie sich der Wasserstand im Behälter über die Zeit verändert.

c) Skizzieren Sie jeweils eine passende Funktion, die den Wasserstand h in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt.

d) Geben Sie eine Funktionsart (linear, quadratisch, exponentiell, etc.) an, die den Wasserstand in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

Nun folgt noch eine kleine Aufgabe im ähnlichen Kontext: Ein Wanderer macht sich von seiner Hütte aus auf den Weg zu einem See. Der Weg führt über mehrere Berge und Täler (siehe linke Abbildung). Unterwegs bemerkt er mehrmals, dass er etwas verloren hat, und kehrt jeweils ein Stück zurück, bevor er seinen Weg fortsetzt. Seine Smartwatch zeichnet während der gesamten Wanderung die Höhe in Abhängigkeit von der Zeit auf.

e) Wie oft hat der Wanderer auf seinem Weg zum See umgedreht? Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe des Höhenprofils (siehe rechte Abbildung).