TEIL A : MC, kurze Beweisaufgaben, vermischte Aufgabentypen

Folgende Symbolausdrücke könnten in einer euklidischen Ebene wahre Aussagen sein.

☐ $AB \equiv CD$ und $AB = BA$

☐ $A \Leftrightarrow AB$

☐ $A \in AB$

☐ $g \cup h = h \cap g$

☐ $(\overline{AB}\sigma_g)\sigma_h = \overline{AB} = h$

☐ $g \perp h$ und $(g \cap h)\pi_A = \emptyset$

☐ $s = \{X \in P \mid X \in \overline{CC_{\overline{AB}}}\}$

Man beurteile folgende Aussagen:

a) $ABCD$ ist Parallelogramm und hat einen Umkreis $\Leftrightarrow$ $ABCD$ ist Rechteck.

☐ beide Richtungen sind falsch ☐ '$\Leftrightarrow$' gilt ☐ nur '$\Rightarrow$' gilt ☐ nur '$\Leftarrow$' gilt

b) Für alle Trapeze $ABCD$ gilt: $AB \equiv CD$ $\Leftrightarrow$ $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

☐ beide Richtungen sind falsch ☐ '$\Leftrightarrow$' gilt ☐ nur '$\Rightarrow$' gilt ☐ nur '$\Leftarrow$' gilt

c) Für alle Kreise k mit $A, B, C, D \in k$ gilt: $ABCD$ ist ein Trapez $\Leftrightarrow$ $AC \equiv BD$.

☐ beide Richtungen sind falsch ☐ '$\Leftrightarrow$' gilt ☐ nur '$\Rightarrow$' gilt ☐ nur '$\Leftarrow$' gilt

Man beurteile folgende Aussagen für das 9-Punkte Modell.	wahr	falsch
Es gibt ein gleichschenkliges Dreieck, welches nicht rechtwinklig ist.	☐	☐
Jedes echte Dreieck enthält stets zwei kongruente Seiten.	☐	☐
Im Rechteck $ABGH$ sind die Diagonalen nicht senkrecht zueinander.	☐	☐
Im Dreieck ABE ist B der Höhenschnittpunkt.	☐	☐
$\{D, F, G, I\}$ ist der Thaleskreis von DFI.	☐	☐

a) Sei $ABCD$ ein Drachen mit Umkreis, und der Mittelpunkt dieses Kreises liege auf $\overline{BD}$. Dann ist $ABCD$

☐ ein Quadrat ☐ kein spezielles Viereck ☐ ein Parallelogramm ☐ ein Rechteck ☐ kollinear

b) Sei 136 ein Dreieck im 9-Punkte Modell. Dann ist sein Seitenmittendreieck und der Feuerbachkreis

☐ 136 und $\{1, 3, 4, 6\}$ ☐ 289 und $\{2, 3, 8, 9\}$ ☐ 289 und $\{2, 7, 8, 9\}$ ☐ 278 und $\{1, 2, 7, 8\}$ ☐ nicht eindeutig bestimmbar

c) Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck, $X \in \overline{AB}$ derart, dass XBC gleichschenklig ist, und Y derart, dass $XCYA$ ein symmetrischer Drachen ist,

☐ dann ist X der Mittelpunkt von AB ☐ dann hat $ABCY$ einen Umkreis ☐ dann ist XBC gleichseitig ☐ dann ist $XCYA$ ein Parallelogramm ☐ das kann es nicht geben

d) Wie viele Trapeze $12BD$ gibt es im 9-Punkte Modell?

☐ 6 Trapeze ☐ 8 Trapeze ☐ 10 Trapeze ☐ 12 Trapeze ☐ keine Zahl stimmt

Definition. Sein a, b parallele und verschiedene Geraden. Sei p eine weitere zu a parallele Gerade mit $\forall X \in p : XX_a \equiv XX_b$. Diese Gerade p nennen wir die Mittelparallele von a und b.

Man gebe eine passende Skizze an und ordne den folgenden Beweis vom

Satz. Sei p die Mittelparallele zweier Geraden a, b. Dann gilt für jedes kollineare Dreieck APB mit $A \in a$, $P \in p$ und $B \in b$ die Kongruenz $AP \equiv PB$, d.h. P ist der Mittelpunkt der Seite AB.

Skizze.

Beweis.

(1) Sei APB ein kollineares Dreieck mit $A \in a$, $P \in p$ und $B \in b$.

(2) Dann sind A, P, B nach Definition paarweise verschieden und liegen auf der Geraden $\overline{AB}$.

(3) Wenn $\overline{AB} \perp a$ gilt die Behauptung nach Definition von p.

(4) Sei nun $\overline{AB}$ zu a nicht senkrecht und sei $C := B_a$

(5) Dann ist ABC ein echtes Dreieck.

(6) Sei N der Schnittpunkt von $\overline{BC}$ mit p.

(7) Dann ist nach Definition von p dieser Schnittpunkt N der Mittelpunkt der Seite BC.

(8) Da p parallel zu $a = \overline{AC}$ und N Mittelpunkt von BC ist, folgt mit dem Satz über die Mittelparallele im Dreieck ABC, dass der Schnittpunkt P von p mit der Geraden $\overline{AB}$ der Mittelpunkt der Seite AB ist.

(9) Damit gilt die Behauptung $AP \equiv PB$.

Meine Reihenfolge lautet

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Sei ABC ein echtes Dreieck. Man zeige: Der Lotfußpunkt von B auf $\overline{AC}$ liegt auf dem Umkreis des Dreiecks $ABA_{\overline{BC}}$.

In den folgenden Axiomen fehlt jeweils ein entscheidendes Detail, ergänzen Sie es.

a) (V) Für alle Punkte A, B gibt es genau eine Verbindungsgerade.

Ergänzung:

b) (P) Zu jeder Geraden und jedem Punkt existiert eine Parallele zur Geraden durch den Punkt.

Ergänzung:

c) (MR) Für alle echten Strecken AB, CX gilt: $AX \equiv BX \quad \Leftrightarrow \quad \overline{CX} \perp \overline{AB}$

Ergänzung:

TEIL B : Beweisaufgaben

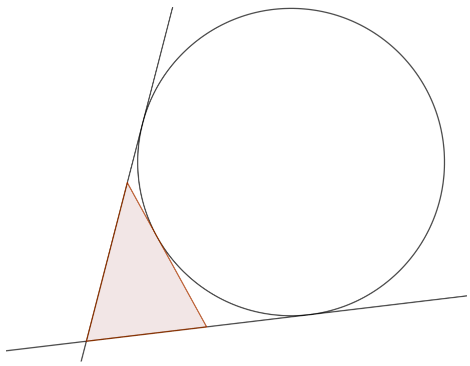
Sei $ABCD$ ein Parallelogramm, S der 2:1-Teilungspunkt von AD und M der Mittelpunkt von SC. Man zeige: Die Geraden $\overline{DM}, \overline{BC}$ schneiden sich im 2:1-Teilungspunkt von BC.

Sei $ABCD$ ein echtes Viereck, in dem die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3, M_4 der Seiten AB, BC, CD, DA und die Mittelpunkte M_5 und M_6 der Diagonalen AC bzw. BD sechs pw. verschiedene Punkte sind. Dann gehen $\overline{M_1M_3}$, $\overline{M_2M_4}$ und $\overline{M_5M_6}$ durch einen gemeinsamen Punkt.

Man zeige, dass es zu jedem Kreis k um M und jedem Punkt A mit $A \neq M$ und $A \notin k$ höchstens 2 Tangenten von k durch A gibt.

Gegeben sei eine euklidische Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv, \perp)$.

Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck. Sei $\overline{CC_{\overline{AB}}}$ die Höhenlinie von C aus.
Sei $k := K(X, Y)$ ein Berührkreis von ABC wie in der Skizze ohne Buchstaben gezeigt. Man zeige: Es gilt



$$CC_{\overline{AB}} \equiv XY.$$

Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Sei K der Mittelpunkt der Seite BC und L der Mittelpunkt der Seite CD. Man beweise die beiden Aussagen.

a) Der Schnittpunkt S der beiden Geraden $\overline{DK}$ und $\overline{LB}$ liegt auf einer Diagonallinie von $ABCD$.

b) Die Verbindungsgerade von D und K schneidet die Verbindungsgerade von A und B in einem Verdopplungspunkt A' von AB.

Sei $ABCD$ ein echtes Viereck mit

(∗) $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$ und $\overline{BC} \nparallel \overline{AD}$

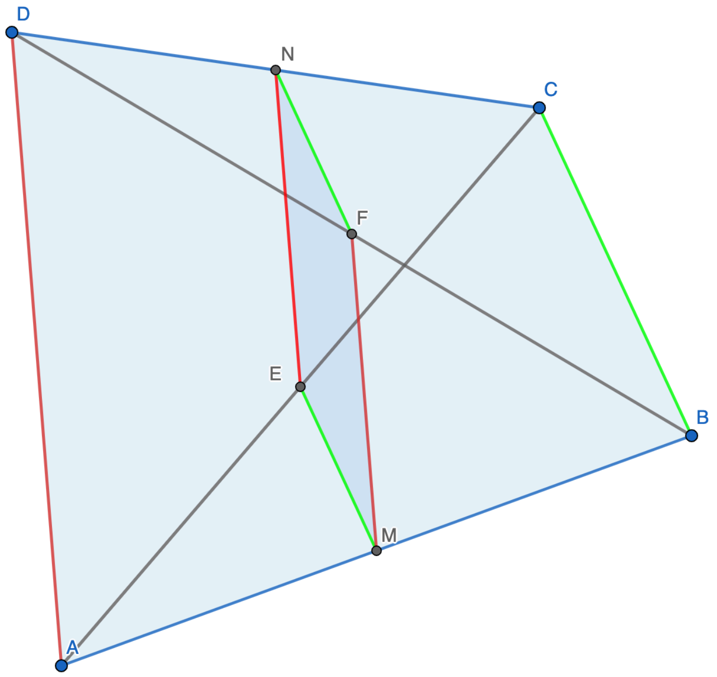
Seien $M \in \overline{AB}, N \in \overline{CD}$ mit $AM \equiv MB$ und $CN \equiv ND$. Seien $E \in \overline{AC}, F \in \overline{BD}$ mit $AE \equiv EC$ und $BF \equiv FD$.

a) Fertigen Sie eine passende Skizze an.

b) Man zeige, dass das Viereck $MENF$ ein Parallelogramm ist.

c) Man begründe kurz (z.B. mit Hilfe von Skizzen), dass auf die Voraussetzung (∗) für den Nachweis der Richtigkeit der Aussage in b) nicht verzichtet werden kann.

d) Man gebe eine Konfiguration des echten Vierecks $ABCD$ so an, dass $MENF$ ein Rechteck ist. Man begründe kurz seine Entscheidung.



a)

Hauptfall.

Sind ACD und ABD echte Dreiecke, dann folgt die Parallelität von $\overline{EN}$ und $\overline{FM}$ direkt aus dem Mittelparallelensatz.

Nach (∗) gilt $\overline{EN} \cap \overline{FM} = \emptyset$, ansonsten wäre $\overline{NM}$ eine Mittelparallelle im Viereck $ABCD$.

Ganz analog folgt $\overline{NF} \parallel \overline{EM}$. Also ist $MENF$ ein Parallelogramm, fast:

Zur Echtheit.

Es gilt stets $N \neq F$ und $E \neq M$.

Es ist $E \neq F$, da sonst $ABCD$ ein Parallelogramm wäre.

Es ist $N \neq M$, da sonst $ADBC$ ein Parallelogramm wäre. Beides widerspräche(∗)

TEIL C : Konstruktionsaufgaben (mit Zirkel und Lineal)

Gegeben sei ein Kreis k mit Mittelpunkt M und eine Geraden g. Man konstruiere einen Punkt A derart, dass eine Tangente t von k durch A parallel zu g ist.

Gegeben sei ein Kreis k mit Mittelpunkt M und eine Geraden g. Man konstruiere einen Punkt A derart, dass eine Tangente t von k durch A senkrecht zu g ist.

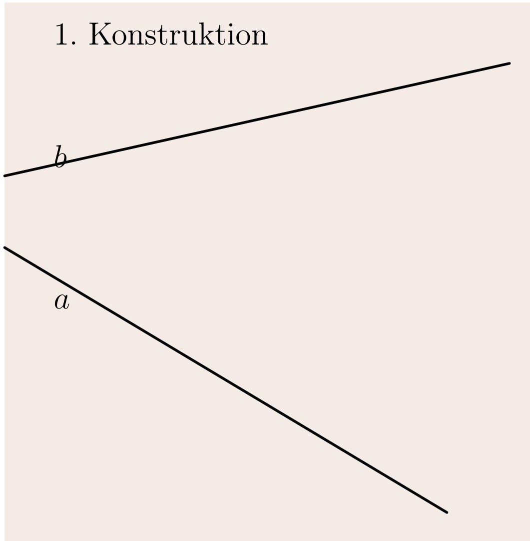
Es sei ein Kreis $k = k(A, T)$ und eine Tangente t an k durch T gegeben. Man konstruiere Punkte $B \in t$ und $M \in k$ so, dass $M \in \overline{AB} \cap k$ der Mittelpunkt von AB ist.

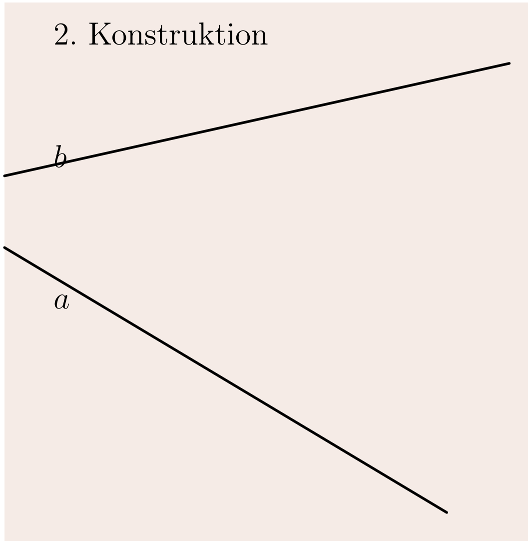
Vorweg eine kleine Definition und ein für diese Aufgabe hilfreicher Hilfssatz:
Definition. *Zwei echte Strecken AB, CD heißen parallel zueinander, wenn ihre zugehörigen Geraden $\overline{AB}, \overline{CD}$ parallel zueinander sind. Auch hierfür verwenden wir die Bezeichnung $AB \parallel CD$.*
Hilfssatz. *Seien g, h zueinander parallele und verschiedene Geraden. Sei AB eine echte Strecke. Man spiegle nacheinander AB an g und an h. Dann ist die zweifach gespiegelte Strecke $A''B''$ parallel zu AB, dass heißt $AB \parallel ((AB)\sigma_g)\sigma_h = A''B''$.*

a) Man konstruiere die im Hilfssatz angegebene Bildstrecke $A''B''$ und gebe eine kurze Konstruktionsbeschreibung an.

b) Seien k_1, k_2 Kreise die sich in den verschiedenen Punkten A, B schneiden. Sei e eine Gerade durch A die k_1 und k_2 in zwei verschiedenen Punkten $E(\neq A), F(\neq A)$ schneidet, d.h. $E \in k_1 \cap e$ und $F \in k_2 \cap e$. Sei f eine zu e parallele Gerade mit $B \in f$ und sei $G \in k_1 \cap f$ und $H \in k_2 \cap f$ mit $G \neq B, H \neq B$ Man zeige, dass dann $EG \parallel FH$ gilt.

Es wird eine Winkelhalbierende von a, b zu konstruieren sein, aber ohne Verwendung des Schnittpunktes. Unten sind zwei Konstruktionen mit jeweils 7 (also 14) Konstruktionsschritten untereinander vermischt. Ordnen Sie jeweils beide Konstruktionen und erstellen Sie jeweils eine passende Skizze, es sind also zwei Konstruktionen mit zwei Skizzen zu erstellen.





Erste Konstruktion

□ □ □ □ □ □ □

Zweite Konstruktion

□ □ □ □ □ □ □

(1) Zeichne $g \nparallel a, b$

(2) Konstruiere $h \parallel g$ mit $g \neq h$

(3) Konstruiere Winkelhalbierende w_1 von g, a und w_2 von g, b

(4) Wähle $S_1 \in w_1 \cap w_2$

(5) Konstruiere Winkelhalbierende w_3 von h, a und w_4 von h, b

(6) Wähle $S_2 \in w_3 \cap w_4$

(7) $\overline{S_1 S_2}$ ist Winkelhalbierende von a, b.

(8) Wähle $A \in a$

(9) Konstruiere $p \parallel b$ durch A.

(10) Konstruiere beide Winkelhalbierenden v, w von p, a

(11) Wähle Schnittpunkt von v oder w mit b und nennen ihn B.

(12) Konstruiere Mittelpunkt M von AB

(13) Konstruiere das Lot s durch M auf $\overline{AB}$

(14) s ist Winkelhalbierende von a, b.