ÜBUNG 1

Hinweis. Die Aufgaben dieser ersten Übung brauchen nicht schriftlich bearbeitet werden.

Es folgt nun ein kurzer zusammenfassender Text über die gesprochenen aber nicht immer fixierten Worte der ersten beiden Vorlesungen.
Wir beschränken uns mit dem Aufbau der ebenen Geometrie. Die Ebene, genauer die Zeichenebene, ist also derjenige Phänomen-Bereich, aus dem wir die intuitiven Tatsachen entnehmen, um damit unsere Raumanschauung zu mathematisieren.
Letzteres bedeutet, dass wir zunächst eine (mathematische) Sprache und Symbolik entwickeln müssen, in der wir die Phänomene beschreiben wollen. Diese angezielte Sprache fußt auf zweierlei:

Einerseits gewisse Objekte bzw. Objekttypen, die wir in der Ebene sichten, und andererseits gewisse strukturelle Gegebenheiten, welche die genannten Objekte miteinander verbinden.

Die Grundobjekte der Zeichenebene nennen wir **Punkte**. Sie bilden sozusagen das Material, aus dem alles was wir betrachten wollen, besteht. Die Zeichenebene selbst ist die volle Punktmenge. Die grundlegende Struktur der Zeichenebne beruht darauf, dass Punkte jeweils einen Abstand voneinander haben. Zweifellos ist dies beides zusammen, die Punkte und die Abstandsstruktur, die Basis unseres Raum-Gefühls. Tatsächlich genügt diese Basis, d.h. man braucht nichts darüber hinaus, um die gesamte (euklidische) Geometrie aufzubauen.

Anordnungsphänomene (also Lagebeziehungen zwischen Objekten wie unten und oben, links und rechts, vorn und hinten) sind gewissermaßen sehr tiefliegend. Sie begleiten alle unsere anschaulichen Beobachtungen, ohne dass dies immer bewusst wird. Wir können sie sozusagen nicht „ausblenden“. Wenn wir z.B. ein Dreieck in Augenschein nehmen und weitere Punkte im Bild hinzufügen, so registrieren wir unwillkürlich, ob diese Punkte im Inneren, im Äußeren oder auf dem Rand des Dreiecks liegen. Wenn wir den Mittelpunkt einer Strecke besichtigen, so können wir nicht umhin, ihn als zwischen den Endpunkten der Strecke liegend zu sehen.
Eine gewisse Reihe von „Tatsachen“ beruhen auf solchen Anordnungsphänomenen. Zum Beispiel:

- Wenn eine Gerade eine Kreislinie nicht nur berührt, sondern schneidet, so muss sie die Kreislinie noch mindestens ein zweites mal schneiden.
- Die beiden Diagonallinien eines Parallelogramms können nicht zueinander parallel sein.
- Liegen zwischen den beiden Endpunkten einer Strecke zwei weitere Punkte, so wird dadurch die Strecke in drei Teile geteilt.

Solche „Tatsachen“ sind also dank unserer Anschauung mitgegeben und werden daher ohne weiteres benutzt, oftmals ohne explizit genannt zu werden.
In der tausendjährigen Entwicklung der Geometrie treten Anordnungsphänomene gar nicht auf, d.h. sie werden mathematisch nicht erfasst. Erst die Vorgänger von Hilbert und auch Hilbert selbst haben dies begrifflich expliziert. Es wurde mit Verblüffung festgestellt, dass viele elementargeometrische Sachverhalte Anordnungsphänomene enthalten, die bei korrekter Behandlung genannt werden müssten. Die Abwesenheit dieser Argumente in den vergangenen

geometrischen Theorien war also eine ernsthafte Lücke. Dies wurde nicht nur mit Verblüffung, sondern geradezu mit Entsetzen festgestellt, da viele ursprünglich recht einfache Argumentationen bei dieser Korrektur ungemein verwickelt wurden. Es war eine kleine wissenschaftliche Katastrophe, eine der ersten ihrer Art überhaupt.

AUFGABE 1

Diskutieren Sie in Ihrer Übungsabgabegruppe ausführlich unsere Definition der Kongruenz von Strecken, also

Definition 0.1 (Kongruenz)**.** *Sei $\mathcal{P}$ eine Menge. Eine Relation Kongruenz (im Zeichen $\equiv$) auf der Menge der Strecken, also $\equiv \subseteq (\mathcal{P} \times \mathcal{P}) \times (\mathcal{P} \times \mathcal{P})$, nennen wir eine Kongruenz-Relation, wenn*

1) $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ ist.

2) für alle verschiedenen Punkte A, B gilt: $AA \equiv BB \not\equiv AB \equiv BA$.

Das Paar $(\mathcal{P}, \equiv)$ nennen wir eine Kongruenz-Struktur.

Verwenden Sie zur Diskussion auch die folgenden Zeilen: Üblicherweise „ordnet“ ein Lineal jeder Strecke eine Zahl als ihre Länge zu, eben durch schlichtes messen des Abstandes, wobei es keine Rolle spielt, ob man von A nach B misst oder umgekehrt. Durch die Messergebnisse sind Strecken miteinander vergleichbar (es besteht also eine Relation zwischen ihnen), und es treten für zwei Strecken AB, CD die folgenden drei groben und äußerst einfachen Vergleichs-Fälle auf:

AB ist kürzer als CD (in etwa hat eine Messung ergeben $AB = 3cm$ und $CD = 5cm$) oder AB ist länger als CD oder AB ist gleichlang wie CD.

Man würde vielleicht mit einer nichtnegativen Abstandsfunktion $|.|$ schreiben: $|AB| < |CD|$, $|AB| > |CD|$, $|AB| = |CD|$. Fasst man die ersten beiden Fälle zusammen, so hat man nur noch die Fallunterscheidung:

AB ist gleichlang wie CD oder nicht gleichlang.

Im obigen Sinne hieße es ganz kurz geschrieben: $|AB| = |CD| \vee |AB| \neq |CD|$.

Das heißt, man gewinnt auf diese Weise die für uns im Augenblick einzig wertvolle (man sagt auch elementare) Beziehung zwischen den Strecken, nämlich die, gleichlang zu sein. Die Ungleichheit von Strecken spielt zunächst bei uns keine so große geometrische Rolle. Die wertvolle Beziehung „gleichlang“ nennt man Kongruenz und bezeichnet sie mit $\equiv$. Wir versuchen den Begriff der Kongruenz gegenüber „gleichlang“ vorzuziehen, da bei uns letzterer stets irgendwelche Messwerte (3cm, etc.) assoziiert, aber wir interessieren uns ja gar nicht für die eigentliche Länge einer Strecke. Die Kongruenz ist nach obiger Definition eine Äquivalenzrelation (warum eigentlich, begründen Sie!) mit gewissen zusätzlichen, von der Abstandsfunktion herrührenden Eigenschaften. Wir verwenden also die äußerst ökonomische Kongruenz als Ersatz für eine raffinierte mit reellen Zahlen hantierende Abstandsfunktion.

AUFGABE 2

Wir haben eine Definition von n-Ecken angegeben, nämlich

Definition 0.2 (n-Ecke). *Sei $\mathcal{P}$ eine Menge von Punkten und $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Unter einem n-Eck verstehen wir ein n-Tupel von Punkten, also $(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n)$, kurz $A_1A_2A_3 \ldots A_n$. Die Komponenten des n-Ecks nennen wir die Ecken des n-Ecks. Zwei aufeinanderfolgende Ecken (einschließlich A_n und A_1) nennen wir benachbart. Die Strecken die aus zwei benachbarten Ecken bestehen heißen die Seiten des n-Ecks. Zwei verschiedene Seiten mit einer gemeinsamen Ecke heißen benachbart. Ein n-Eck mit lauter verschiedenen Ecken nennen wir nicht-entartet.*

Auch die folgende Definition wäre denkbar (und vielleicht auf den ersten Blick charmanter):

Definition 0.3 (n-Ecke). *Sei $\mathcal{P}$ eine Menge von Punkten und $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Unter einem n-Eck verstehen wir eine n-elementige Menge von Punkten, also $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$, kurz $A_1A_2A_3 \ldots A_n$. Die Elemente der Menge nennen wir die Ecken des n-Ecks.*

a) Beschreiben und diskutieren Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede beider Definitionen.

b) Beschreiben und diskutieren Sie mögliche Konsequenzen obiger Mengendefinition (zum Beispiel auf die Begriffe: Strecken, (benachbarte) Seiten, etc.)

c) Untersuchen Sie in einigen Schulbüchern, wie dort die obigen Begriffe eingeführt bzw. definiert werden.

AUFGABE 3

Auf der Seitenlinie $\overline{AB}$ eines Parallelogramms $ABCD$ liegt ein vom Punkt A verschiedener Punkt P so, dass der Winkel $\measuredangle PDC$ die gleiche Größe wie ein Nebenwinkel des Winkels $\measuredangle ADC$ hat.

Untersuchen Sie verschiedene Lagebeziehungen und entdecken Sie Zusammenhänge. Hier folgt ein GeoGebra link zum Probieren https://www.geogebra.org/m/fhz3y9rz .

Hinweis. Im Verlauf des gesamten Semesters möchten wir Ihnen dringend empfehlen, das kostenlose Programm GeoGebra zu verwenden. Wir sind der Überzeugung, dass die Nutzung dieses Programms Ihre Lernerfahrung in der Geometrie erheblich bereichern und verbessern wird.