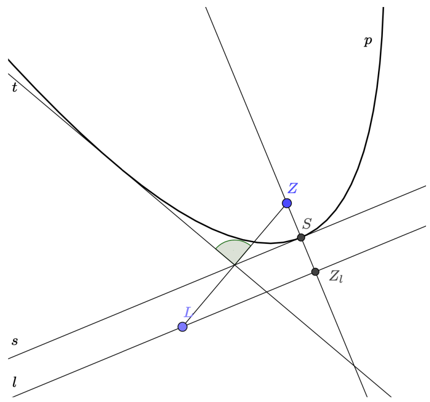
ÜBUNG 13

Abgabe der Bearbeitungen bis Freitag, den 14. Juni bis 12 Uhr

Es folgt eine Zusammenfassung der wichtigsten Sätze rund um das Thema Parabeln, einige werden wir erst am Montag diskutieren.

Definition .1. *Sei l eine Gerade, Z ein Punkt mit $Z \notin l$ und $p := \{X \mid XZ \equiv XX_l\}$. Dann heißt (Z, l, p) eine Parabel mit Brennpunkt Z und Leitgerade l.*
Die Lote auf l heißen Achsen, die Mittellote von ZL mit $L \in l$ heißen Tangenten der Parabel.
Die Achse durch Z heißt Hauptachse.
Der Mittelpunkt S von ZZ_l ist offenbar ein Punkt aus p, er heißt der Scheitelpunkt der Parabel.
Das Mittellot s von ZZ_l ist offenbar eine Tangente, sie heißt die Scheiteltangente.



Für alles Weitere sei eine feste Parabel (Z, l, p) gegeben.
Aus der Definition folgt sofort der ...

Satz .2. *Alle Achsen und Tangenten schneiden p in genau einem Punkt.*

Satz .3 (Charakterisierung der Tangenten)**.**

a) Keine Tangente ist eine Achse.

b) Keine Tangente geht durch Z.

c) Sei s die Scheiteltangente von (Z, l, p). Für jede Gerade g sind die folgenden Aussagen zueinander äquivalent.

- *i) g ist eine Tangente*
- *ii) $Z\sigma_g \in l$*
- *iii) $Z_g \in s$.*

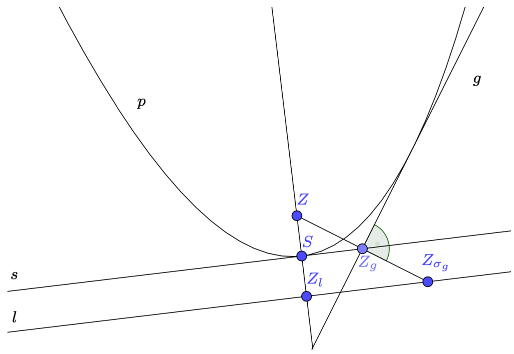
Beweis. *a) und b) sind klar.*

zu c)

Die Äquivalenz i) ⇔ ii) folgt direkt mit der Definition der Tangente.

Die Äquivalenz ii) ⇔ iii) ergibt sich aus dem Mittelparallelensatz und daraus, dass S der Mittelpunkt von ZZ_l und Z_g Mittelpunkt von $ZZ\sigma_g$ ist.

□



Mit diesem Satz folgt ohne weiteres:

Satz .4 (Konstruktion von Tangenten)**.**

a) In jeder Richtung (außer der Achsenrichtung) gibt es genau eine Tangente.

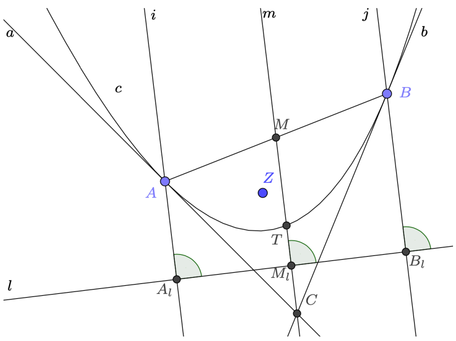
b) Durch jeden Punkt von p geht genau eine Tangente.

Satz .5 (Sehnen-Tangenten-Dreieck)**.** *Seien A, B verschiedene Punkte von p. AB heißt eine Sehne von p.*
Sei a die Tangente durch A, b die Tangente durch B und C der Schnittpunkt von a, b. Dann gilt:

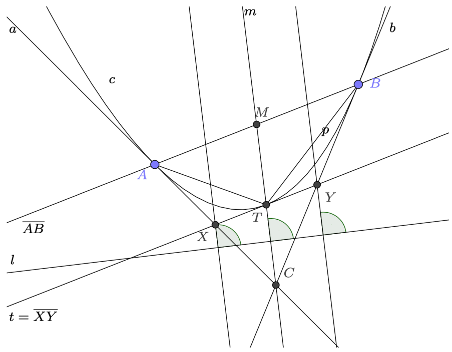
a) Die Achse m durch C geht durch den Mittelpunkt M von AB. m heißt die Achse der Sehne AB.
Der Schnittpunkt T von m und p heißt der Scheitel der Sehne AB.

b) Die Tangente t durch T ist parallel zu $\overline{AB}$. T ist der Mittelpunkt von CM.

Beweis. *zu a) Bei der Orthogonalprojektion von $\overline{AB}$ auf l wird nach dem Mittelparallelensatz der Mittelpunkt M von AB auf den Mittelpunkt M_l von A_lB_l abgebildet. Also geht das Mittellot m von A_lB_l durch M. Die Mittellote des Dreiecks A_lB_lZ sind die Geraden m, b, a. Sie gehen durch einen Punkt, nämlich C. Also geht die Achse m durch C auch durch M.*



zu b) Wir wenden Teil a) auf die Sehne AT an. Sei X der Schnittpunkt von a, t. Dann geht die Achse durch X durch den Mittelpunkt von AT. Also geht sie nach dem Mittelparallelensatz durch den Mittelpunkt von AC. Somit ist X der Mittelpunkt von AC. Analog folgt, dass der Schnittpunkt Y von t, b der Mittelpunkt von BC ist. Wieder mit dem Mittelparallelensatz folgt, dass $t = \overline{XY} \parallel \overline{AB}$ ist. Wendet man den Mittelparallelensatz auf das Dreieck AMC an, so ergibt sich, dass T Mittelpunkt CM ist.



□

Mit diesem Satz beherrscht man die Parabeln, er ist das Analogon zur Sehnenregel bei den Kreisen. Man kann hieraus zunächst das Schnittverhalten von Gerade und Parabel ableiten:

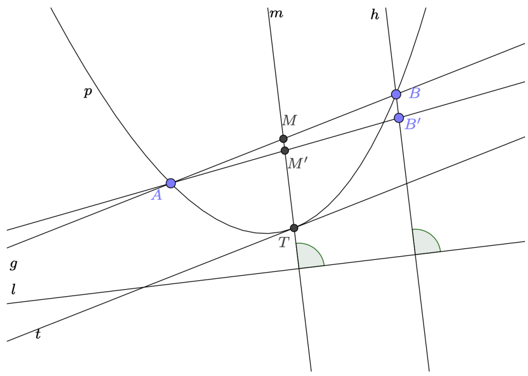
Folgerung .6. *Jede Gerade schneidet p in höchstens zwei Punkten.*

Beweis. *Sei g eine Gerade und seien A, B, C Schnittpunkte von g mit p. Sei $A \neq B$ und $A \neq C$. Wir zeigen $B = C$. Sei t die zu g parallele Tangente und T der Schnittpunkt von t, p. Dann ist nach Satz 15.5 T der Scheitel sowohl der Sehne AB, als auch der Sehne AC. Sei M der Schnittpunkt der Achse durch T mit g. Dann ist wieder nach Satz 15.5 M sowohl der Mittelpunkt von AB, als auch der Mittelpunkt von AC. Nach der Eindeutigkeit des Verdopplungspunktes ist $B = C$.* □

Es folgt

Folgerung .7. *Die Achsen und Tangenten sind die einzigen Geraden, die p in genau einem Punkt schneiden.*

Beweis. *Sei $A \in p$ und g eine Gerade durch A, die weder eine Achse noch eine Tangente ist. Zu zeigen ist, dass g noch einen weiteren Schnittpunkt mit p hat.*
Sei t die zu g parallele Tangente und T der Schnittpunkt von t, p. Dann gilt offenbar $t \neq g$ und daher $t \cap g = \emptyset$, also $A \neq T$. Sei m die Achse durch T. Dann schneidet m die Gerade g in einem Punkt M. Offenbar ist $A \neq M$.
Sei B der Verdopplungspunkt von AM, dann ist $B \in g$ und $B \neq A$. Sei h die Achse durch B und B' der Schnittpunkt von h, p.
Wegen $m \parallel h$ geht nach dem Mittelparallelensatz m durch den Mittelpunkt M' von AB'. Die Tangente t ist also nach dem Satz eben parallel zu $\overline{AB'}$. Andererseits ist t auch parallel zu $g = \overline{AB}$. Also ist $\overline{AB'} = \overline{AB}$ und somit $B' = B$. B ist also eine weiterer Schnittpunkt von g, p. □



Nun können wir die Eindeutigkeit von Parabeln zeigen, dies besagt der folgende ...

Satz .8. *Bei jeder Parabel ist der Brennpunkt und die Leitgerade eindeutig durch die Ortslinie p bestimmt.*

Beweis. *Seien $pa := (Z, l, p)$ und $pa' := (Z', l', p)$ Parabeln (mit derselben Ortslinie p). Zu zeigen ist $Z = Z'$ und $l = l'$.*
Sei h die Achse von pa' durch Z. Dann haben h, p genau eine Schnittpunkt. Also ist nach Folgerung 6 die Gerade h eine Achse oder eine Tangente von pa. Nach Satz 3 b) ist h keine Tangente von pa, also ist sie eine Achse. Somit haben pa' und pa eine gemeinsame Achse und daher gilt:

1. *$l \parallel l'$*
2. *h ist Hauptachse von pa*

   Aus 1. folgt sofort

3. *pa und pa' haben dieselben Achsen.*

   Aus 3. und Folgerung 6 folgt

4. *pa und pa' haben auch dieselben Tangenten.*

   Da die Scheiteltangente parallel zu l (bzw. l') ist, folgt mit Satz 4a)

5. *pa und pa' haben dieselbe Scheiteltangente s. Daraus folgt mit Satz 2*
6. *pa und pa' haben denselben Scheitelpunkt S.*

   Da die Hauptachse durch den Scheitelpunkt geht, folgt

7. *h ist auch die Hauptachse von pa'*

   und somit gilt

8. *$Z, Z' \in h$.*

Zu zeigen bleibt $Z = Z'$ (denn dann folgt mit 6. $l = l'$)
Man wählt dazu eine Tangente t mit $t \neq s$. Nach Satz 3c) gilt $Z_t, Z'_t \in S$. Wäre $Z_t \neq Z'_t$, so würde folgen: $t = \overline{Z_t Z'_t} = s$ im Widerspruch zur Wahl von t. Also gilt $Z_t = Z'_t$. Sei g das Lot von Z_t auf t. Dann gilt $Z, Z' \in g$. Zusammen mit 8. folgt: $Z = Z'$ oder $g = h$.

> *Annahme g=h.*
> *Dann gilt $h \perp t$, also $t \parallel s$ und somit $t = s$. (nach Satz 4a) im Widerspruch zur Wahl von t.*

Also gilt $Z = Z'$. □

Auf Grund dieses Satzes kann die Redeweise vereinfacht werden:

Man nennt die Ortslinie einer Parabel selbst die Parabel und lässt bei ihrer Nennung Brennpunkt und Leitgerade weg.

So, nun zu den Aufgaben.

Sei eine feste Parabel (Z, l, p) gegeben.

AUFGABE 1

Man beweise Satz .2 und a) und b) von Satz .3, also

a) Alle Achsen und Tangenten schneiden p in genau einem Punkt.

b) Keine Tangente ist eine Achse.

c) Keine Tangente geht durch Z.

AUFGABE 2

Man beweise Satz .4, also

a) In jeder Richtung (außer der Achsenrichtung) gibt es genau eine Tangente.

b) Durch jeden Punkt von p geht genau eine Tangente.

AUFGABE 3

Man konstruiere die folgenden Figuren mit Zirkel und Lineal und gebe eine Konstruktionsbeschreibung an und getrennt davon eine Begründung für die Richtigkeit der Konstruktion.

a) Konstruktion des Schnittpunktes einer Achse mit p.

b) Konstruktion des Schnittpunktes einer Tangente mit p.

c) Konstruktion einer Tangente in beliebiger Richtung (außer der Achsenrichtung) .

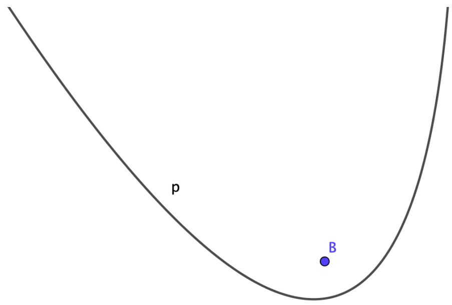
d) Konstruktion der Tangenten durch einen beliebigen Punkt (der geeignet liegt).

e) Konstruktion der Schnittpunkte von p und einer Geraden g, die weder eine Achse noch eine Tangente von p ist und die so liegt, dass sie p schneidet.

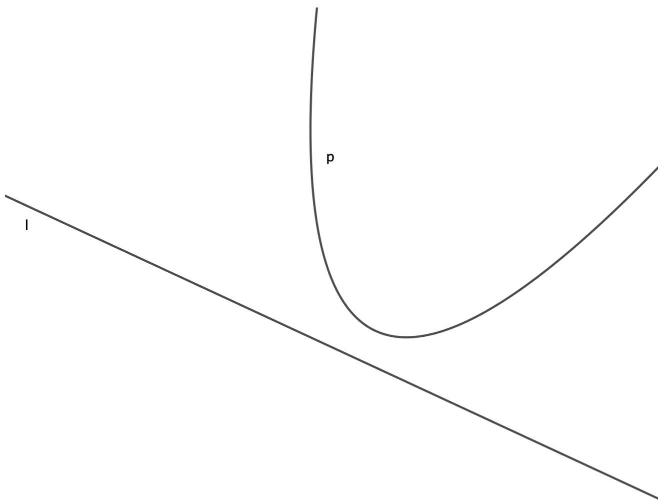
f) Konstruktion eines Berührkreises an einer Geraden g durch zwei verschiedene Punkte A, B, die nicht auf g liegen (und beide auf derselben Seite von g sind).

AUFGABE 4

a) Gegeben sei eine Parabel p und ihr Brennpunkt B. Man konstruiere aus diesen beiden Objekten mit Zirkel und Lineal die Leitgerade ℓ von p und gebe eine Konstruktionsbeschreibung an. Eine Begründung wird nicht gefordert.



b) Gegeben sei eine Parabel p und ihre Leitgerade ℓ. Man konstruiere aus diesen beiden Objekten mit Zirkel und Lineal den Brennpunkt B von p und dies ohne Verwendung von Parallelen. Man gebe anschließend eine Konstruktionsbeschreibung und eine Begründung für die Richtigkeit der Konstruktion an.



SCHUL-AUFGABE (VON DER MO-BUNDESRUNDE, 8. KLASSE)

In einem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seitenlinien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ liegen die Punkte A, E, F und B in dieser Reihenfolge auf der Seite AB.
Die Geraden $\overline{DE}, \overline{CF}, \overline{AC}$ und $\overline{BD}$ teilen das Trapez in sieben Dreiecke und ein Fünfeck. Der Flächeninhalt des blauen Fünfecks ist gleich der Summe der Flächeninhalte der drei grünen Dreiecke, die mit dem Trapez jeweils eine Seite gemeinsam haben.
Man beweise, dass dann die Geraden $\overline{CF}$ und $\overline{DE}$ parallel sind.

Hier der Link zur GeoGebra Figur: https://www.geogebra.org/m/rqkw8kqk