ÜBUNG 2

Das Durchlaufen von Linien oder Geraden ist ein Anordnungsphänomen, d.h. man „durchläuft“ eine Gerade z.B. von „links nach rechts“. Da wir die Anordnung (also im Wortsinn von Orientierung begrifflich beschrieben durch oben, unten, rechts und links) eliminiert haben, können wir Geraden nicht mehr durchlaufen, was heißt das?
Es heißt schlicht, dass Linien einfach nur Punktmengen (also eine Menge von Punkten) sind. Ist l eine Linie und A ein Punkt, so bedeutet $A \in l$, dass A auf l liegt etc. Damit hatten wir in der letzten Vorlesung den folgenden im Vergleich zur Kongruenzstruktur einfachen Strukturbegriff diskutiert und etabliert:

Definition 0.1. *Sei $\mathcal{P}$ eine Menge und $\mathcal{G}$ eine Menge von Teilmengen von $\mathcal{P}$. Dann heißt $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine Inzidenzstruktur, wobei wir die Elemente aus $\mathcal{G}$ Linien bzw. Geraden nennen. Linien bzw. Geraden kürzen wir mit kleinen lateinischen Buchstaben ab, etwa g, h, i.*

Bei einer Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ gibt es keinerlei Einschränkungen. Daher kann es sein, dass die Elemente von $\mathcal{G}$ anschaulich betrachtet alles andere als Geraden sind. Weil aber auf diese Weise Geraden meist mathematisiert werden, benutzt man den Buchstaben $\mathcal{G}$ und nennt dessen Elemente kurzerhand Geraden. Bei der axiomatischen Beschreibung der Zeichenebene denkt man sich die Elemente von $\mathcal{G}$ als Geraden. $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ ist somit die Inzidenzstruktur der Zeichenebene.

AUFGABE 1

Sei $\mathcal{P} := \{A, B, C, D\}$ eine Menge von Punkten. Offenbar gilt $|\mathcal{P}| = 4$.

a) Man bestimme die Anzahl aller möglichen Inzidenzstrukturen $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$.

b) Man bestimme die Anzahl aller echten Strecken, die mit der Punktmenge $\mathcal{P}$ gebildet werden können.

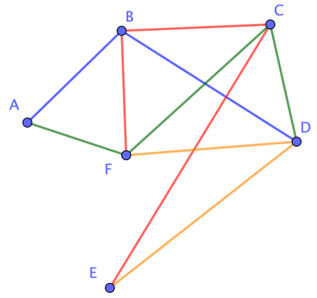
c) Man bestimme die Anzahl aller Dreiecke, die mit der Punktmenge $\mathcal{P}$ gebildet werden können.

d) Man bestimme die Anzahl aller nicht-entarteten Vierecke, die mit der Punktmenge $\mathcal{P}$ gebildet werden können.

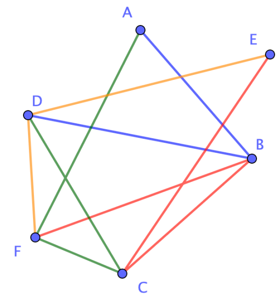
e) Man bestimme die Anzahl aller Fünfecke, die mit der Punktmenge $\mathcal{P}$ gebildet werden können.

AUFGABE 2

Man gebe für die beiden Figuren in (a) und (b) passende Inzidenzstrukturen $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ an, wobei die „Geraden“ durch verschiedene Farben dargestellt sind.



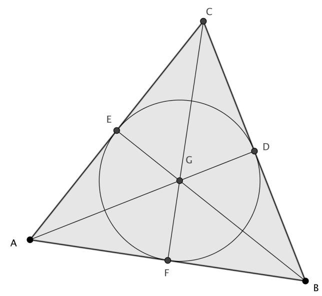
(a)



(b)

AUFGABE 3

Man gebe für die geg. Figur eine passende Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ an. In der Figur sind 7 Geraden „zu sehen“. Außerdem gebe man für die u.a. Inzidenzstruktur eine kreative Figur an.



$(\mathcal{P}, \mathcal{G}) = (\{A, B, C, D\}, \{\{A, B\}, \{A, B, C\}, \{B, C, D\}, \{C, D\}, \{B\}\})$

AUFGABE 4

Sei $\mathcal{P} := \{A, B, C\}$ eine Menge von Punkten.

a) Man gebe alle Äquivalenzrelationen R_i auf $\mathcal{P}$ an und gebe deren Äquivalenzklassen an (mit Beweis).

b) Man gebe zwei verschiedene Kongruenz-Relationen $\equiv_1$ und $\equiv_2$ auf $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ an (mit Beweis).

****

In der letzten Aufgabe jeder Übung folgt ab jetzt eine Geometrie-Aufgabe, die mit Hilfe der Schulmathematik zu lösen ist. Sie dürfen dabei alle Sätze der Sekundarstufe verwenden.

AUFGABE 5

Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Sei k der Umkreis von ABC und sei M der Mittelpunkt von k. Seien D, E, F die Spiegelpunkte von A, B, C an M.
Man bestimme das Verhältnis der Flächeninhalte des Sechsecks $AFBDCE$ und des Dreiecks ABC.