Hinweis

Um der Vielfalt der Schulsysteme in den Bundesländern Rechnung zu tragen, aber auch die Mathematik-Olympiade bundesweit durchführen zu können, wurde der Begriff *Olympiadeklasse* geprägt. Die Aufgaben und Lösungen werden für die Olympiadeklassen 3 bis 12 angeboten.

Für die Bundesrunden gelten die folgenden Regeln zur Einstufung der Teilnehmer in die Olympiadeklassen 8 bis 12. Es wird empfohlen, diese Regeln in gleicher Weise für alle Olympiadeklassen der ersten 3 Runden anzuwenden.

- Für die Primarstufe und die Sekundarstufe 1 entspricht die Olympiadeklasse grundsätzlich dem laufenden Schuljahr.

- Für die Sekundarstufe 2 gibt es bundesweit unterschiedliche Bezeichnungen oder Nummerierungen der schulischen Jahrgangsstufen. In der Abiturstufe sind daher
  - die Olympiadeklasse 10 für die einjährige Einführungsphase und
  - die Olympiadeklassen 11 und 12 für die beiden Jahre der Qualifikationsphase

  vorgesehen.

- Die beiden Standard-Abläufe der Olympiadeklassen für die Primarstufe bis zum Abitur sind:
  - **G8**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10/E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

  - **G9**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10	E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**10**	**11**	**12**

- **Wichtig: Doppelstart in Olympiadeklasse 10**
  Für eine optimal abgestimmte Vergleichbarkeit zwischen den beiden Abläufen starten Schülerinnen und Schüler aus G9 sowohl in ihrem Abschlussjahr der Sekundarstufe 1 als auch im Einführungsjahr der Sekundarstufe 2 in der Olympiadeklasse 10.

- **Wichtig: Klasse 13 startet in Olympiadeklasse 12**
  Daher starten Schülerinnen und Schüler aus G9 in ihrem Abiturjahr in der Olympiadeklasse 12.

Olympiadeklasse **5**

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

610511

Nach dem Unterricht treffen sich Nele, Lara und Josy auf dem Spielplatz. Die Mädchen haben verschiedene Lieblingsgeräte; diese sind die Rutsche, der Schaukelkorb und das Klettergerüst.

(1) Nele und das Mädchen, das am liebsten klettert, gehen in die gleiche Klasse.
(2) Lara meidet den Schaukelkorb, weil ihr da schon öfter schwindelig geworden ist.
(3) Nele und das Mädchen, das gerne schaukelt, wohnen in der gleichen Straße.

Ermittle, welches Mädchen welches Lieblingsgerät auf dem Spielplatz hat.

Schreibe deine Lösungsüberlegungen auf.

610512

Tobias möchte die Zahlen von 1 bis 10 jeweils als Ergebnis einer Rechnung erhalten, bei der genau viermal die Zahl 8 verwendet wird. Dabei soll er nur die vier Rechenzeichen $+$, $-$, $:$, $\cdot$ und Klammern benutzen. Beim Rechnen muss er die Vorrangregel für die Rechenoperationen und für die Klammern beachten.

Tobias hat für die 0 folgende Darstellung gefunden: $8 : 8 - 8 : 8 = 0$. Dann sucht er weiter und findet für alle Zahlen von 1 bis 10 eine Darstellung – nur für die 5 nicht.

a) Gib für jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 und 10 jeweils eine Darstellung an.

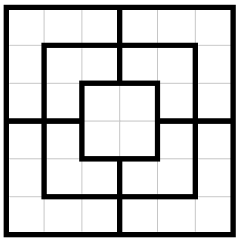
Tobias nimmt sich jetzt eine fünfte Zahl 8, und nun gelingt es ihm, auch die Zahl 5 darzustellen.

b) Stelle die Zahl 5 nach den Regeln durch fünf Ziffern 8 dar.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

610513

Die Abbildung zeigt ein Mühle-Brett.



a) Zeichne die Linien auf dem Spielfeld in möglichst wenigen Zügen nach. Dabei darf keine Linie doppelt gezeichnet werden. Solange du den Stift nicht absetzt, ist das immer noch derselbe Zug. Nimm für jeden neuen Zug eine neue Farbe.
Wie viele Farben brauchst du mindestens?
Hinweis: Du brauchst nicht zu begründen, dass es keine kleinere Zahl an Farben gibt.

b) Wie lang (in Kästchenlängen) ist der längste Zug, den man nach dieser Regel zeichnen kann? Begründe, dass es keinen längeren Zug geben kann.

c) Male die neun Flächen im Spielfeld farbig aus. Flächen, die eine gemeinsame Liniengrenze haben, sollen unterschiedliche Farben aufweisen.
Wie viele Farben brauchst du wenigstens? Begründe dein Ergebnis.

610514

Clara hat einen Haufen mit vielen „Kupfermünzen“ vor sich, also Münzen zu 1 Cent, 2 Cent und 5 Cent.

Sie überlegt: Wenn ich mit den Münzen aus diesem Haufen insgesamt einen Betrag von 20 Cent bilden will, so kann ich 20 1-Cent-Münzen nehmen. Ich kann also die 20 Cent aus zwanzig Münzen bilden. Andererseits kann ich auch vier 5-Cent-Münzen nehmen. Also kann ich die 20 Cent auch aus nur vier Münzen bilden. Wie ist das mit anderen Anzahlen von Münzen?

a) Zeige, dass sich für jede Anzahl von Münzen zwischen 20 und 4 Münzen (also mit 19 Münzen, mit 18 Münzen usw.) mit einer Ausnahme eine Zusammenstellung von „Kupfermünzen“ finden lässt, deren Gesamtwert wieder 20 Cent beträgt.
Welche Anzahl bildet die Ausnahme und warum?

b) Warum braucht sich Clara nicht um die Anzahlen von Münzen oberhalb von 20 oder unterhalb von 4 zu kümmern?

Olympiadeklasse **6**

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

610611

Anna, Bea, Clara und Dana haben viele gleich große Papierquadrate in den Farben Rot, Grün, Blau und Weiß.

a) Jedes der Mädchen wählt sich zunächst eine der Farben; dabei wählt jede eine andere. Ermittle, wie viele Möglichkeiten die Mädchen dafür haben.

Nun schneiden die Mädchen alle Papierquadrate entlang einer Diagonalen in jeweils zwei Dreiecke. Aus jeweils zwei der farbigen Dreiecke legen sie nun wieder Quadrate.

b) Wie viele verschiedene Quadrate können die Mädchen so legen?
Wie viele Quadrate davon sind zweifarbig?

c) Danas kleiner Bruder kommt und möchte zwei der zweifarbigen Quadrate mitnehmen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Wahl dieser zwei Quadrate?

Hinweis: Quadrate werden als gleich angesehen, wenn sie durch Drehungen und Verschiebungen auseinander hervorgehen.

610612

Über das jeweilige Alter der drei Schwestern Alina, Melina und Selina ist Folgendes bekannt:

(1) Alina ist doppelt so alt wie Selina.
(2) Alina und Melina sind zusammen 20 Jahre alt.
(3) Selina ist zwei Jahre jünger als Melina.

a) Ermittle jeweils das Alter der drei Schwestern.

b) Die Mutter der drei Schwestern war vor drei Jahren doppelt so alt wie damals alle drei Mädchen zusammen. In wie vielen Jahren wird die Mutter doppelt so alt sein, wie Alina dann sein wird?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

610613

Alex hat in einem Murmelbeutel 39 Murmeln, und zwar 6 rote, doppelt so viele blaue wie rote und doppelt so viele gelbe wie grüne Murmeln.

a) Wie viele Murmeln von jeder Farbe hat Alex in seinem Murmelbeutel?
b) Wie viele Murmeln muss er mit geschlossenen Augen mindestens herausnehmen, damit er auf jeden Fall eine rote Murmel dabei hat?
c) Wie viele Murmeln muss er mit geschlossenen Augen mindestens herausnehmen, damit er auf jeden Fall 3 Murmeln der gleichen Farbe dabei hat?
d) Wie viele Murmeln muss er mit geschlossenen Augen mindestens herausnehmen, damit er auf jeden Fall eine Murmel von jeder Farbe dabei hat?

Finde die Anzahlen heraus und begründe, warum es nicht mit weniger Murmeln geht, als du angegeben hast!

610614

Fritz spielt folgendes Zahlenspiel:

Auf einem unbegrenzt langen Kästchenstreifen, bei dem die Kästchen der Reihe nach nummeriert sind, stehen drei Figuren anfangs auf den Feldern 1, 2 und 3. Ein Zug besteht darin, die Figur auf der kleinsten Zahl die beiden anderen überspringen zu lassen und dann diese Figur noch einmal um dieselbe Zahl von Feldern vorzurücken.

Der erste Zug führt also aus der Anfangsstellung (**1**, **2**, **3**) in die Stellung (**2**, **3**, **7**), denn die Figur auf Feld 1 zieht zunächst auf Feld 4, also drei Felder weiter, und dann noch einmal drei Felder weiter auf Feld 7.

a) Gib jeweils die Stellung der drei Figuren nach drei, vier und fünf Zügen an.
b) „Uhh, die Zahlen steigen aber schnell!“ meint Fritz. In welchem Schritt überspringt die letzte Figur das Feld 100?

Olympiadeklasse
7

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

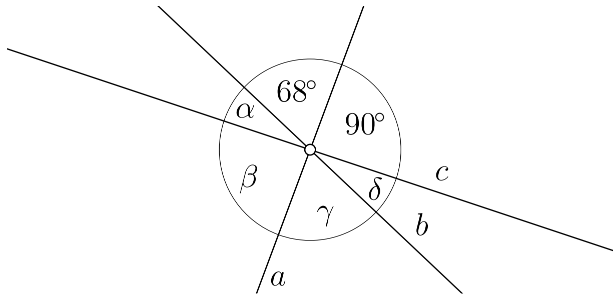
610711

In einem alten Buch mit mathematischen Knobeleien fand sich folgender Vers:

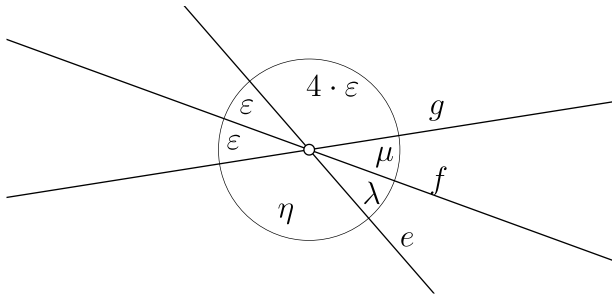
> Eine Zahl hab ich gewählt,
> 107 zugezählt,
> dann durch 100 dividiert
> und mit 11 multipliziert,
> endlich 15 subtrahiert,
> und zuletzt ist mir geblieben
> als Resultat die Primzahl 7.

Ermittle alle möglichen Zahlen, die gewählt werden können, damit der Vers zu einer wahren Aussage wird.

610712



A 610712 a



A 610712 b

a) Die nicht maßstabsgerechte Abbildung A 610712 a zeigt drei Geraden a, b und c, die einander in einem Punkt schneiden und Winkel der Größen α, β, γ, δ, 90° und 68° bilden.

   Berechne die Winkelgrößen α, β, γ und δ.

b) Die nicht maßstabsgerechte Abbildung A 610712 b zeigt drei Geraden e, f und g, die einander in einem Punkt schneiden und Winkel der Größen ε, ε, η, λ, μ und $4 \cdot \varepsilon$ bilden.

   Berechne die Winkelgrößen ε, η, λ und μ.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

610713

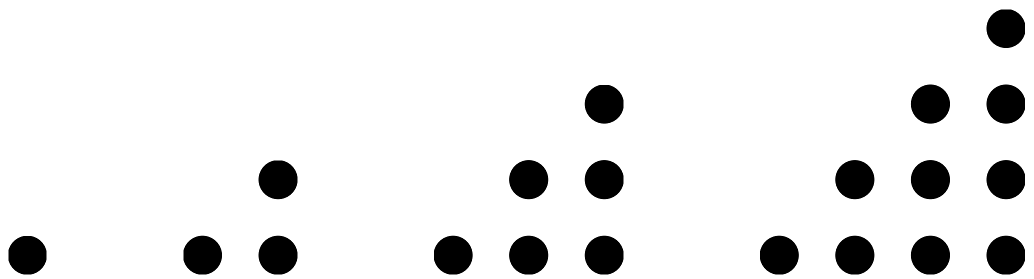
Um von der Haustür zur Wohnungstür zu gelangen, muss Mia eine Treppe mit genau sieben Stufen überwinden. Mit einem Schritt kann sie höchstens drei Stufen nehmen. Daher sind zum Beispiel folgende Schrittfolgen möglich:

1 Stufe – 2 Stufen – 3 Stufen – 1 Stufe
3 Stufen – 2 Stufen – 2 Stufen
2 Stufen – 3 Stufen – 2 Stufen

Ermittle die Anzahl aller Schrittfolgen, die Mia für diese Treppe nehmen kann.

610714

In der Abbildung sind vier Muster aus Punkten gezeigt. Das erste Muster besteht nur aus einem Punkt, beim zweiten kommen zwei Punkte hinzu, beim dritten kommen drei Punkte hinzu, beim vierten kommen vier Punkte hinzu.



Allgemein entsteht das n-te Muster durch Hinzufügen von n Punkten zum vorherigen Muster. Die Punkte sind dabei ab dem zweiten Muster in Form eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks angeordnet. Die Anzahl der Punkte im n-ten Muster heißt daher n-te Dreieckszahl und wird mit d_n bezeichnet. Wie man der Abbildung entnehmen kann, gelten $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = 6$ und $d_4 = 10$.

a) Berechne die Dreieckszahlen d_5, d_6, d_7 und d_8.

b) Finde eine Formel, mit deren Hilfe man die n-te Dreieckszahl d_n berechnen kann, und berechne d_{15}.

c) Wir bezeichnen mit s_n die Summe der Reziproken der ersten bis zur n-ten Dreieckszahl. Es gelten also $s_1 = \frac{1}{d_1}$, $s_2 = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}$, $s_3 = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3}$ und so weiter.
Berechne die Zahlen s_2 bis s_6.

d) Finde eine Vermutung für die Formel, mit deren Hilfe man s_n berechnen kann, und berechne s_{99}. Ein Beweis dieser Formel wird nicht erwartet.

Olympiadeklasse **8**

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

610811

Zu den Schülern Elias, Jonas und Leon macht ihr Mathematiklehrer folgende Aussagen, von denen genau eine falsch ist und die anderen wahr sind.

(1) Jonas ist älter als Leon.
(2) Leon ist älter als Elias.
(3) Elias ist älter als Jonas.
(4) Leon und Elias sind zusammen doppelt so alt wie Jonas.

a) Welche der vier Aussagen ist falsch?
b) Welcher Junge ist am ältesten?

610812

Um 17 Uhr zündet Elise gleichzeitig drei Kerzen an. Sie sind alle drei gleich hoch, aber unterschiedlich dick. Jede Kerze brennt gleichmäßig ab. Um vollständig abzubrennen, braucht die erste Kerze 10 Stunden, die zweite Kerze 8 Stunden und die dritte Kerze 12 Stunden.

Als Elise alle drei Kerzen ausbläst, ist die erste noch genau doppelt so hoch wie die zweite.

a) Zu welcher Uhrzeit bläst Elise die drei Kerzen aus?
b) Ermittle, wie hoch dann die zweite Kerze im Verhältnis zur dritten ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

610813

Beweise, dass für jedes Dreieck ABC und für jede Gerade g die folgenden Aussagen gelten:

a) Wenn die Gerade g durch den Mittelpunkt B' der Seite $\overline{AC}$ verläuft und parallel zur Geraden AB ist, dann schneidet die Gerade g die Seite $\overline{BC}$ in deren Mittelpunkt A'.

b) Wenn die Gerade g durch den Mittelpunkt B' der Seite $\overline{AC}$ und den Mittelpunkt A' der Seite $\overline{BC}$ verläuft, dann ist die Gerade g parallel zur Geraden AB.

c) Die Verbindungsstrecke $\overline{A'B'}$ des Mittelpunkts A' der Seite $\overline{BC}$ und des Mittelpunkts B' der Seite $\overline{AC}$ ist halb so lang wie die Dreieckseite $\overline{AB}$.

Hinweise:

1. Die Beweise sollten unter Nutzung von Kongruenzsätzen, Eigenschaften von Parallelogrammen, Sätzen zu Winkeln an geschnittenen Parallelen, aber ohne Anwendung von Strahlensätzen erfolgen, da die obigen Aussagen Grundlagen für elementargeometrische Beweise der Strahlensätze sind.
2. Eine Strecke, die die Mittelpunkte zweier Seiten eines Dreiecks verbindet, heißt auch Mittellinie dieses Dreiecks. Die in b) und c) zu zeigenden Aussagen sind zusammengefasst der Satz über die Mittellinien im Dreieck:

   In jedem Dreieck ist die Mittellinie zweier Seiten parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.

610814

Unter einer Lösung der Gleichung $L + E + V + E + L = 61$ verstehen wir natürliche Zahlen L, E und V größer als 0, für die diese Gleichung gilt.

Ermittle die Anzahl aller Lösungen dieser Gleichung, bei denen keine zwei der drei Zahlen L, E und V gleich sind.

Olympiadeklassen **9–10**

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

611011

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, die Sterne in der Gleichung

$$**61*61*61 = (**61*)^2$$

so durch Ziffern von 0 bis 9 zu ersetzen, dass die Gleichung im Zehnersystem stimmt. Dabei können die Sterne durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.

611012

Gegeben ist die lineare Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = 3x + 7$. Aus den Werten von f werden die Werte von z mit $z = f(a) + f(a+1) + f(2a+3)$ berechnet.

Hinweis: Zum Beispiel bedeutet $f(8a-4)$, dass man $8a-4$ in das Argument von f einsetzen muss. Also $f(8a-4) = 3 \cdot (8a-4) + 7 = 24a - 5$.

a) Bestimmen Sie einen Term für z in Abhängigkeit von a, der das Symbol f nicht mehr enthält.

b) Gibt es eine natürliche Zahl a, für die $z = 10^{2021}$ gilt?

c) Gibt es eine natürliche Zahl a, für die z durch 2021 teilbar ist?

d) Gibt es eine natürliche Zahl a, für die z (im üblichen Zehnersystem) eine 2021-stellige Zahl mit 2021 gleichen Ziffern ist?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

611013

a) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen z mit der Eigenschaft, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die Ungleichung $n \cdot z < 2021$ gilt.

b) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen z mit der Eigenschaft, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die Ungleichung $\frac{2n+1}{3n+2} < z$ gilt.

611014

Das Viereck $ABCD$ sei ein Parallelogramm, bei dem der Abstand der parallelen Geraden AB und CD gleich 6 ist. E und F seien die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$. Die Gerade DE schneide die Strecke $\overline{BF}$ im Punkt P und die Gerade AB im Punkt Q.

a) Zeigen Sie, dass $|AQ| = 2\,|AB|$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass P auf der Geraden AC liegt und bestimmen Sie die Länge des Abstands von P zur Geraden AB.

611015

Zum Test des räumlichen Vorstellungsvermögens sind die Seitenflächen eines Würfelnetzes mit „links“, „rechts“, „oben“, „unten“, „vorn“ und „hinten“ zu beschriften. Nach dem Zusammenbau des Würfels legt man ihn auf den Tisch und untersucht die Beschriftung. Pro richtig beschrifteter Fläche gibt es einen Punkt.

Zur Bepunktung wird der Würfel natürlich so gedreht, dass es möglichst viele Punkte gibt.

Welche Punktzahlen sind möglich (und welche nicht), wenn bekannt ist, dass wirklich die sechs Worte „oben“, „unten“, „vorn“, „hinten“, „links“ und „rechts“ verwendet wurden und jedes Quadrat des Würfelnetzes genau eines dieser Worte enthält?

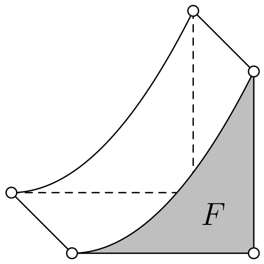
611016

Für diese Aufgabe wird das **Cavalieri’sche Prinzip** als bekannt vorausgesetzt. Es besagt für zwei Körper K_1 und K_2:

> Wenn jede zu einer gegebenen Ebene E parallele Ebene E' die Körper K_1 und K_2 in Flächen gleichen Inhalts schneidet, dann haben diese Körper das gleiche Volumen.

In einem ebenen kartesischen x-y-Koordinatensystem betrachten wir die Fläche F, die aus denjenigen Punkten $P(x, y)$ besteht, deren Koordinaten x und y die Ungleichungen $0 \le x \le 1$ und $0 \le y \le x^2$ erfüllen. Im Raum betrachten wir weiterhin den allgemeinen Zylinder Z mit Höhe 1 und Grundfläche F, der entsteht, wenn man F um 1 senkrecht zur x-y-Ebene verschiebt (siehe Abbildung A 611016). Außerdem ist eine gerade Pyramide K der Höhe 1 gegeben, deren Grundfläche ein Quadrat der Seitenlänge 1 ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!



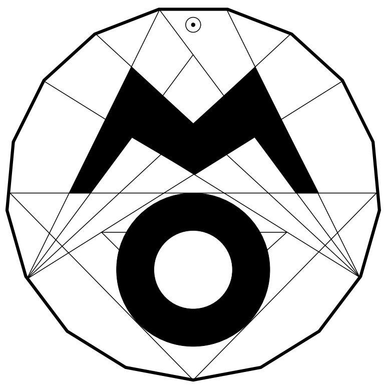
A 611016

a) Zeigen Sie, dass Z und K das gleiche Volumen haben.

b) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche F.

Hinweis: Ein Nachweis der Volumengleichheit der oben beschriebenen Körper ist hier möglich, wenn man eine geeignete Lage der Körper im Raum und eine Ebene E findet, um das Cavalieri'sche Prinzip anzuwenden.

Wir verwenden in dieser Aufgabe einen **erweiterten Begriff des Zylinders**, bei dem die Grundfläche eine beliebige Fläche sein kann (Zylinder in diesem Sinn sind also nicht nur Kreiszylinder, sondern zum Beispiel auch Dreiecksprismen). Begriffe wie Grundfläche G, Deckfläche D und Höhe h als Abstand zwischen Grund- und Deckfläche werden sinngemäß verwendet. Es gilt auch hier die bekannte Volumenformel $V = G \cdot h$.



Olympiadeklassen **11–12**

61. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

611211

Die positiven ganzen Zahlen a, b, c und d haben die folgenden vier Eigenschaften:

(1) a und c sind Primzahlen.

(2) c und d unterscheiden sich um genau 1.

(3) a, b, c erfüllen die Gleichung $a \cdot b + 1 = c$.

(4) b, c, d erfüllen die Gleichung $b \cdot d + 1 = b \cdot c + 6$.

Man berechne die Zahl $(b \cdot d + 1) \cdot 10\,000 + d \cdot 100 + c$.

611212

Für eine natürliche Zahl n werden alle Möglichkeiten betrachtet, n rote und n schwarze Kugeln in einer Reihe anzuordnen. Zwei Anordnungen werden dabei als gleich angesehen, wenn auf den Plätzen „1“, „2“, ..., „$2n$“ jeweils die Farben der Kugeln übereinstimmen.

Man beweise, dass die Anzahl dieser Anordnungen durch $(n + 1)$ teilbar ist.

611213

Es seien a und b zwei gegebene reelle Zahlen mit $|a| \neq |b|$. Wir betrachten das folgende Gleichungssystem für die reellen Unbekannten x und y:

$$x + |y| = a\,,$$
$$|x| + y = b\,.$$

Man bestimme alle Lösungspaare (x, y) in Abhängigkeit von a und b.

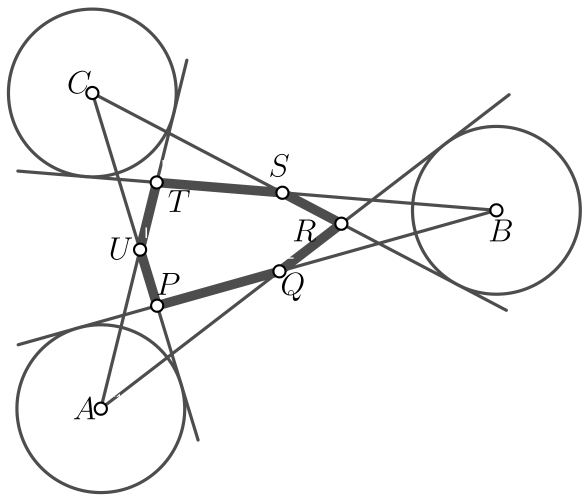
Auf der nächsten Seite geht es weiter!

611214

Die Mittelpunkte A, B, C dreier kongruenter Kreise, die keine gemeinsamen Punkte haben, liegen nicht auf derselben Geraden. Von den Punkten A, B, C werden die sechs in Abbildung A 611214 gezeigten Tangenten an die Kreise gelegt, die ein konvexes Sechseck einschließen.

Man beweise: Die Summen der Längen von jeweils drei paarweise nicht unmittelbar benachbarten Seiten dieses Sechsecks sind gleich, d. h., es gilt

$$|PQ| + |RS| + |TU| = |QR| + |ST| + |UP| \ .$$



A 611214