Wie man sehr pedantisch modelliert

In der Stochastik ist dem mathematischen Arbeiten durch Beweise oft eine Übersetzung des Zufallsexperimentes aus der realen Welt in die Mathematik durch ein Modell vorgelagert. Erst nach dieser kann in der Ihnen bekannten Struktur *Voraussetzung – Behauptung – Beweis* gearbeitet werden. Außerdem muss nach dem abgeschlossenen Beweis das Ergebnis „zurückübersetzt“, also das mathematische Resultat im Kontext des Modelles interpretiert werden. Die Struktur für Modellierungsaufgaben in der Stochastik ist also:

I. Modellierung – II. Behauptung – III. Beweis – IV. Interpretation

I Modell: Hier bilden wir die Ausgangssituation durch **vollständig und korrekt definierte** mathematische Objekte ab.[1] Das Modell kann nicht richtig, nur sinnvoll sein[2]. Ein gutes Modell bildet das Zufallsexperiment so einfach wie möglich ab, allerdings ohne Wesentliches wegzulassen. Alle Argumente, Rechnungen und Lösungsschritte für die Aufgabe sollten aber im Beweis auftauchen, nicht im Modell.
Wir definieren jeweils folgende **rein mathematische** Objekte, danach erklären wir unsere Interpretation. Im Beispiel unten trennen wir farblich das rein Mathematische und unsere Interpretation. Das ist auch für Sie bei Ihren Aufgaben hilfreich.

(a) Der Ergebnisraum Ω sollte mit seinen Elementen in einer zur Aufgabe passenden Weise alle Ausgänge des Zufallsexperimentes darstellen.

(b) Die Wahrscheinlichkeitsfunktion P modelliert passend zum Zufallsexperiment die Eintrittswahrscheinlichkeiten aller **Ereignisse.**[3]

(c) Das günstige Ereignis ist eine Teilmenge von Omega. Je nach Aufgabe, kann es mehrere günstige Ereignisse geben.

II Behauptung: Eine mathematisch formal korrekte Aussage über die mathematischen Objekte aus dem Modell. **Nichts** aus Interpretationen oder rein Anschauliches darf hier vorkommen.

III Beweis: Leitet die Behauptung formal korrekt her. Nichts aus Interpretationen oder rein Anschauliches darf hier vorkommen - nur definierte mathematische Objekte. Streicht man alle Interpretationen im Modell, muss das übrigbleibende Mathematische ein vollständiger Beweis incl. Voraussetzung und Behauptung sein.

IV Interpretation: Hier wird das bewiesene Resultat im Kontext der Aufgabenstellung erklärt, quasi „zurückübersetzt “.

[1] Wir erstellen quasi eine Übersetzung *reale Welt - Mathematik*

[2] allerdings durch formale Fehler oder großen Unsinn sehr wohl falsch

[3] Ereignisse sind Teilmengen von Omega, keine Elemente von Omega

Aufgabe 1 Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein fairer Spielwürfel wird n mal geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei mindestens eine 6 geworfen wird?

I Modell:

(a) Sei $\Omega := \{1,2,3,4,5,6\}^n$. Bei jedem Ergebnis $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ steht ω_1 für die beim ersten Wurf geworfene Augenzahl, ω_2 für die des Zweiten, ... ω_n dann für die des Letzten.

(b) Sei $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ die Laplacefunktion. Es sollte jede Augenzahl bei den Einzelwürfen, also auch jede Augenzahlenfolge bei n Würfen gleich wahrscheinlich sein, da der Würfel fair ist. Dieses bildet die Laplacefunktion ab.

(c) Sei $A := \{\omega \in \Omega | \exists i \in \{1, \dots, n\} : \omega_i = 6\}$. A enthält alle n-Tupel, in denen mindestens ein Eintrag eine 6 ist. Gemäß Interpretation oben stehen diese für die Wurffolgen, in denen mindestens eine 6 geworfen wird.

II Behauptung: Es gilt $P(A) = 1 - (\frac{5}{6})^n$.

III Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}\Omega \setminus A &= \{\omega \in \Omega \mid \neg(\exists i \in \{1, \dots, n\} : \omega_i = 6)\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : \omega_i \neq 6\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : \omega_i \in \{1,2,3,4,5\}\} \\ &= \{1,2,3,4,5\}^n\end{aligned}$$

Mit der Regel über die Gegenwahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned}P(A) &= 1 - P(\Omega \setminus A) \\ &= 1 - P(\{1,2,3,4,5\}^n) \\ &= 1 - \frac{|\{1,2,3,4,5\}^n|}{|\Omega|} \\ &= 1 - (\frac{5}{6})^n\end{aligned}$$

IV Interpretation: Die Wahrscheinlichkeit, bei n Würfen mit einem fairen Würfel mindestens eine 6 zu werfen, ist $1 - (\frac{5}{6})^n$.

A Negativbeispiele zu Aufgabe 1

Passend zu dem Beispiel einer korrekten Lösung der ersten Beispielaufgabe mittels Modellierung, hier einige Beispiele für schlechte oder falsche Lösungen zur selben Aufgabe:

Achtung Fehler oder ungenaue Lösung!

I Modell:

(a) Sei $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n$. Bei jedem Ergebnis $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ steht ω_1 für die beim ersten Wurf geworfene Augenzahl, ω_2 für die des Zweiten, ... ω_n dann für die des Letzten.

(b) Sei P die Laplacefunktion. Es sollte jede Augenzahl bei den Einzelwürfen, also auch jede Augenzahlenfolge bei n Würfen gleich wahrscheinlich sein, da der Würfel fair ist. Dieses bildet die Laplacefunktion ab.

(c) Sei $A := \{\text{„}\mathit{Bei\ n\ Würfen\ wird\ mindestens\ eine\ 6\ geworfen}\text{“}\}$

II ....

Die Modellierung fängt gut an, A ist aber keine mathematisch formal korrekte Menge, insofern kann man mit A im Beweis nicht arbeiten und die Modellierung ist ungenau, weil sie nicht vollständig das Experiment in Mathematik übersetzt. Stellen Sie sich vor, ein:e Übersetzer:in für Englisch -Deutsch würde den Satz „Sir, in my heart there was a kind of fighting | That would not let me sleep. “übersetzen als „Sir, in meinem heart war eine Art von fighting, die mich nicht sleepen lässt “. Dass hilft denjenigen, die kein Englisch können nicht. Da wir im Beweis aber nur die Sprache der Mathematik benutzen und die mathematische Sprache per se nichts von „Würfelwürfen “, „Münzen “,... versteht, ist auch so ein A nicht korrekt. In vielen Kontexten und Aufgaben kann es Sinn ergeben, unvollständig zu modellieren, es ist ja oft deutlich anschaulicher. Wenn Sie aber explizit modellieren üben sollen, ist ein A wie oben nicht korrekt.

Achtung Fehler oder ungenaue Lösung !

I Modell:

(a) Sei $\Omega := \{1,2,3,4,5,6\}^n$. Bei jedem Ergebnis $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ steht ω_1 für die beim ersten Wurf geworfene Augenzahl, ω_2 für die des Zweiten, ... ω_n dann für die des Letzten.

(b) Sei P die Laplacefunktion. Es sollte jede Augenzahl bei den Einzelwürfen, also auch jede Augenzahlenfolge bei n Würfen gleich wahrscheinlich sein, da der Würfel fair ist. Dieses bildet die Laplacefunktion ab.

(c) Sei $A := \{6\}$. Weil nach der Wahrscheinlichkeit für das Werfen einer 6 gesucht ist, wählen wir die Menge mit der 6 als günstiges Ereignis.

II ...

Das Modell ist falsch. Denn per Definition muss für jedes Ereignis gelten, dass es eine Teilmenge von Omega ist. Aber hier ist $A \nsubseteq \Omega$.

Achtung Fehler oder ungenaue Lösung!

I Modell:

(a) Sei $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Es steht jede Zahl $\omega \in \Omega$ für die geworfene Zahl beim Würfeln.

(b) Sei P die Laplacefunktion auf Ω. Es sollte jede Augenzahl bei den Einzelwürfen, also auch jede Augenzahlenfolge bei n Würfen gleich wahrscheinlich sein, da der Würfel fair ist. Dieses bildet die Laplacefunktion ab.

(c) Sei $A := \{6\}$. Weil nach der Wahrscheinlichkeit für das Werfen einer 6 gesucht ist, wählen wir die Menge mit der 6 als günstiges Ereignis.

II Behauptung: $P(A) = 1 - (\frac{5}{6})^n$

III Beweis: Es ist für einen Würfelwurf $P(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \frac{5}{6}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit für keine Sechs bei n Würfen $(\frac{5}{6})^n$. Weil das Gegenereignis davon, also das Ereignis, mindesten eine sechs zu werfen, gesucht ist, ist $P(\{A\}) = 1 - (\frac{5}{6})^n$.

Das Modell ist nicht sinnvoll. Denn nirgendwo wird abgebildet, dass n mal geworfen wird, es beschreibt das Zufallsexperient also nicht gut genug. Das zeigt sich in einer Behauptung, die mit unserer Modellierung falsch ist, denn wenn man P und A wie modelliert wählt, ist nach Definition der Laplacefunktion $P(\{A\}) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$. Im Beweis sieht man dann, dass nicht (wie es richtig gewesen wäre) nur mit den mathematischen Objekten, sondern immer noch mit der Anschauung gearbeitet wird. Das ist ebenfalls ein Fehler.

Achtung Fehler oder ungenaue Lösung!

I Modell:

(a) Sei $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Es steht jede Zahl $\omega \in \Omega$ für die geworfene Zahl beim Würfeln.

(b) Sei P definiert durch $P(A) = 1-(\frac{5}{6})^n$. Einmal keine 6 würfle ich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6}$. Nie eine 6 also mit $(\frac{5}{6})^n$. Mindestens eine ist davon das Gegenereignis, also tritt es mit Wahrscheinlichkeit $1 - (\frac{5}{6})^n$ ein, deswegen sollte hier $P(A)$ wie definiert gewählt werden.

(c) Sei $A := \{6\}$ Weil nach der Wahrscheinlichkeit für das Werfen einer 6 gesucht ist, wählen wir die Menge mit der 6 als günstiges Ereignis.

II Behauptung: Es gilt: $P(A) = 1 - (\frac{5}{6})^n$.

III Beweis: ???

Das Modell ist nicht sinnvoll. Ähnlich wie oben beschreibt Omega nicht wirklich das n-malige Werfen. Während oben allerdings auch das Maß unpassend war, wird hier der (vergebliche) Versuch gestartet, das mit dem Maß irgendwie so hinzubiegen, dass es wieder passt und das vorher bereits ohne Modellierung als „richtig "identifizierte Resultat herauskommt. Deswegen wird einfach - zweifelsohne mit einer guten Erklärung - definiert, dass das „richtige "herauskommt. Im Beweis ist dann gar nichts mehr zu tun, weil man ja quasi oben gesagt hat „Sei das Ergebnis als das richtige Ergebnis definiert ". Das ist allerdings nicht Sinn einer Modellierung. Diese soll dazu dienen, die Denkarbeit und Herleitung in der Sprache und mit den Methoden der formalisierten Mathematik machen zu können. Alles an Denkarbeit steckt hier ja aber in der Erklärung, warum das Maß denn passend wäre. Es wird hier auch der Fehler gemacht, A zu benutzen, bevor es definiert ist. Oft taucht bei so einer Modellierung noch als weiterer Fehler irgendein nicht zum Model passender Beweis auf - weil man mit den passenden Objekten ja gar nichts mehr beweisen muss oder kann, aber noch etwas als Beweis stehen haben möchte, weil es sonst so leer aussieht.

Achtung Fehler oder ungenaue Lösung!

I Modell:

(a) Sei $\Omega := \{1,2,3,4,5,6\}^n$. Bei jedem Ergebnis $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ steht ω_1 für die beim ersten Wurf geworfene Augenzahl, ω_2 für die des Zweiten, ... ω_n dann für die des Letzten.

(b) Sei P die Laplacefunktion. Es sollte jede Augenzahl bei den Einzelwürfen, also auch jede Augenzahlenfolge bei n Würfen gleich wahrscheinlich sein, da der Würfel fair ist. Dieses bildet die Laplacefunktion ab.

(c) Sei $A := \{\omega \in \Omega | \exists i \in \{1, ..., n\} : \omega_i = 6\}$. A enthält alle n-Tupel, in denen mindestens ein Eintrag eine 6 ist. Gemäß Interpretation oben stehen diese für die Wurffolgen, in denen mindestens eine 6 geworfen wird.

II Behauptung: Es gilt $P(A) = 1 - (\frac{5}{6})^n$.

III Das Gegenereignis von A ist das Ereignis, keine 6 zu werfen. Also ist es $\{1,2,3,4,5\}^n$. Es gilt :

$$\begin{aligned} P(\{1,2,3,4,5\}^n) &= \frac{|\{1,2,3,4,5\}^n|}{|\Omega|} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^n \end{aligned}$$

Also ist $P(A) = 1 - P(\{1,2,3,4,5\}^n) = 1 - (\frac{5}{6})^n$.

IV Interpretation: Die Wahrscheinlichkeit, bei n Würfen mit einem fairen Würfel mindestens eine 6 zu werfen, ist $1 - (\frac{5}{6})^n$.

Hier ist der Fehler nicht so groß und etwas feinsinniger: Das Gegenereignis wurde nicht mathematisch, sondern mithilfe der Interpretation versucht herzuleiten. Das ist (wenn man wirklich sehr pedantisch ist) ein Fehler, denn wenn man mal alles Anschauliche wegnimmt, liest es sich nicht wie ein rein mathematischer Beweis. (Genaugenommen müsste auch die erste Zeile des Beweises in der Anschauungsfarbe geschrieben sein). Obige Lösung ist deutlich anschaulicher als eine mit rein mathematischem Beweis und dadurch in vielen Kontexten (zum Beispiel, wenn Sie mit Schüler:innen arbeiten) besser geeignet, um die Aufgabe und den Gedankengang zu verstehen. Wenn Sie aber modellieren, also das Übersetzen in Mathematik üben sollen, ist die Lösung so nicht passend.