ÜBUNG 9

Abgabe der Bearbeitungen am Freitag, den 24. November bis 10 Uhr

Es folgt ein kurzer Überblick über den Stand der Vorlesung.

Definition 1 (Unabhängigkeit von zwei Ereignissen)
Die Ereignisse A, B heißen *unabhängig voneinander* in (Ω, P) genau dann, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Damit folgen sofort für unabhängige Ereignisse A und B die Gleichungen $P_B(A) = P(A)$ und $P_A(B) = P(B)$.
Oftmals werden die letzt genannten Gleichungen auch als Definition zur Unabhängigkeit zweier Ereignisse gebracht. Besonders deutlich wird hier der Begriff der Unabhängigkeit, da ein vorher eingetretenes Ereignis offensichtlich zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit keine Rolle mehr spielt.
Verwechseln Sie nicht die Begriffe *Unvereinbarkeit* und *Unabhängigkeit*. Die Unvereinbarkeit ist ausschließlich eine Mengenangelegenheit bzgl. Ω, wobei die Unabhängigkeit stets eine Eigenschaft der Ereignisse auf den gesamten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) ist, insbesondere auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung P.

Erweiterungen der Unabhängigkeit:

Definition 2 (Unabhängigkeit von drei Ereignissen)
Die Ereignisse A, B und C heißen *unabhängig voneinander* in (Ω, P) genau dann, wenn die folgenden $2^3 = 8$ Gleichungen gelten:
$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.
$P(\bar{A} \cap B \cap C) = P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C)$.
$P(A \cap \bar{B} \cap C) = P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C)$.
$P(A \cap B \cap \bar{C}) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C})$.
$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C)$.
$P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C})$.
$P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C})$.
$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C})$.

Definition 3 (Unabhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ Ereignissen)
Die Ereignisse A_1, A_2, A_3, $\ldots$, A_n mit $n \in N$ heißen *unabhängig voneinander* in (Ω, P) genau dann, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $2 \leqslant k \leqslant n$ und alle Indizes $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ gilt, dass $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot P(A_{i_3}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$ gilt.

Aufgabe 1
Von den Ereignissen E, F, G sind E und F unabhängig voneinander und es ist $G \subseteq E$. Folgt daraus, dass G und F unabhängig voneinander sind?

Aufgabe 2 [mit Modellierung]
Eine Münze wird dreimal geworfen, dabei sei

i) A das Ereignis: Beim ersten Wurf zeigt die Münze „Zahl“.

ii) B das Ereignis: Beim zweiten Wurf zeigt die Münze „Zahl“.

iii) C das Ereignis: „Zahl“ erscheint genau zweimal hintereinander.

Was lässt sich über die stochastische Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von je zwei dieser Ereignisse sagen?

Aufgabe 3
Aus jedem von drei Gewehren wird ein Schuss abgefeuert. Es seien E_1, E_2, E_3 die Ereignisse, dass das Ziel vom ersten, zweiten bzw. dritten Gewehr getroffen wird.
Wir nehmen $P(E_1) = 0,5$, $P(E_2) = 0,6$ und $P(E_3) = 0,8$ an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Treffer registriert wird, wenn die Ereignisse E_1, E_2 und E_3 unabhängig voneinander sind?

Aufgabe 4
Es wird mit zwei Würfeln gewürfelt. A sei das Ereignis, dass die beiden Augenzahlen sich um 1 oder um 5 unterscheiden. Für jedes $s \in \{2, ..., 12\}$ sei B_s das Ereignis, dass die Augensumme $\leq s$ ist. Man gebe ein s an, für das gilt, dass die Ereignisse A, B_s unabhängig sind.

Aufgabe 5
Beweisen Sie, dass die folgende Eigenschaft von drei Ereignissen mit unserer Definition 2 äquivalent ist:
Die Ereignisse A, B und C sind *unabhängig voneinander* in (Ω, P), wenn die folgenden 4 Gleichungen gelten:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$.
$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$.
$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

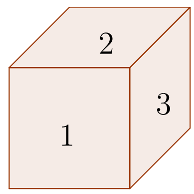
Aufgabe 6
Wie in der Vorlesung am Montag angesprochen: Man könnte meinen, dass aus der paarweisen Unabhängigkeit von Ereignissen schon insgesamt die Unabhängigkeit der Ereignisse folgt, wir hatten dazu schon ein Beispiel. Es folgt nun ein weiteres schönes Beispiel von

SERGEI NATANOWITSCH BERNSCHTEIN (1880-1968):
Von den vier Flächen eines Tetraeder ist eine rot, eine grün, eine blau, die letzte Fläche enthält alle drei Farben. Man betrachte das Ereignis R „der Tetraeder zeigt eine rote Farbe“. Entsprechend seien G und B definiert. Zeigen Sie, dass R, G und B jeweils paarweise unabhängig sind, aber dass dies nicht insgesamt der Fall ist.

Abschließend zwei „alte“ Klausuraufgaben.

Aufgabe K1
Gegeben sind ein Zufallsexperiment und die Ereignisse A und B.
Dabei gilt $P(B) = 32\%$, $P_A(B) = 40\%$ und $P_{A^c}(B^c) = 70\%$.
Man bestimme die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A.

Aufgabe K2
Zwei (Laplace-)Würfel sollen (anders als üblich) auf allen sechs Seitenflächen nur mit den Zahlen 1, 2 oder 3 beschriftet werden (wobei jede Zahl auf jedem Würfel mindestens einmal verwendet wird), und zwar so, dass die Wahrscheinlichkeit, bei einmaligem Werfen dieser beiden Würfel die Augensumme 3 zu bekommen $\frac{5}{18}$ ist, und die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 5 auch $\frac{5}{18}$ ist.



Man bestimme alle möglichen Beschriftungen der beiden Würfel so, dass die beiden Wahrscheinlichkeits-Bedingungen erfüllt sind (dabei spielt es keine Rolle, welche Anordnungen die Zahlen auf den Flächen haben).