

Der Widerspruchsbeweis

Bemerkung 6.1

Der Begriff und das Phänomen „Gegenbeispiel“ hilft uns nun, den letzten noch ausstehenden Beweistyp zu verstehen. Die Idee eines Widerspruchsbeweises ist, dass man fälschlicherweise annimmt, dass die Negation einer zu beweisende (korrekten) Aussage WAHR sei. Zwangsläufig muss sich dann durch logische Schlussfolgerungen irgendein gearteter Widerspruch (d.s.h. eine FALSCH Aussage wie z.B. $1 > 2$) ergeben. Da es sich häufig bei zu beweisenden Tatsachen um Allaussagen in Implikationsform handelt, treffen wir hier unsere bekannte Formalisierung von eben wieder, nämlich (vgl. Bemerkung 1.7) die WAHRE Aussage $\forall x \in M : A(x) \Rightarrow B(x)$, deren Negation als WAHR angenommen wird, d.s.h. wir bilden

$$\neg(\forall x \in M : A(x) \Rightarrow B(x)) \leftrightarrow \exists x \in M : \neg(A(x) \Rightarrow B(x)) \leftrightarrow \exists x \in M : A(x) \wedge \neg B(x).$$

Insgesamt erhalten wir

$$\neg(\forall x \in M : A(x) \Rightarrow B(x)) \leftrightarrow \exists x \in M : A(x) \wedge \neg B(x) \Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow \text{FALSCH}$$

Damit muss aber die so genannte Annahme $\neg(\forall x \in M : A(x) \Rightarrow B(x))$ doch FALSCH gewesen sein, so dass ist die ursprüngliche Aussage WAHR ist, was ja zu zeigen wahr.