Wahrscheinlichkeitsrechnung – Übung Aufgabe 2.b und 3

BINOMIALVERTEILUNG, BINOMIAL TABELLE, UNABHÄNGIGE EREIGNISSE

Zentrale Methodenlehre, Europa Universität - Flensburg

Binomialverteilung

Sei X eine diskrete Zufallsvariable, die so definiert ist:

X=Anzahl der Erfolge bei „n“ Wiederholungen (Versuchen) eines Zufallsexperiments.

X folgt einer Binomialverteilung mit 2 Parametern n = Anzahl der Versuche und p = P(Erfolg):

X~B(n, p)

X nimmt die Werte 0,1,2,…,n an

Folgende Zufallsvariablen sind Binomialverteilt:

- Anzahl der Studenten, die dieses Semester Statistik I besuchen und am Ende bestehen werden.
- Anzahl der Schüler in einer Klasse mit 25 Schülern, die besondere Förderung benötigen.
- Anzahl der Mütter dieser Klasse, die keine Unterhaltsleistungen erhalten.

Binomialverteilung

Um Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Binomialverteilung zu bestimmen, kann man entweder die Wahrscheinlichkeitsfunktion benutzen, um diese Wahrscheinlichkeiten zu berechnen:

$$Wenn\ \boldsymbol{X \sim B(n, p)},\ dann\ \boldsymbol{P(X = x) = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}}$$

oder eine Tabelle der Binomialverteilung benutzen, um die Wahrscheinlichkeit zu lesen. *In diesem Seminar werden wir **nur** Tabellen der Binomialverteilung lesen*.

Binomialverteilung

Tabelle der Binomialverteilung:

Sei X=Anzahl der Schüler, die in einer Gruppe mit 8 Schülern ADHS haben

Man weiß, dass P(ADHS zu haben) = 0.11 ist.

Also:

X~B(8,p=P(ADHS zu haben)) → **X~B(8,0.11)**; R_x={0,1,2,3,4,5,6,7,8}

n

P(X=1) = ?

P(X≤2) = ?

n	8	p								
k		0.08	0.1	0.11	0.17	0.2	0.26	0.38	0.4	0.7
0		0.5132	0.4305	0.3937	0.2252	0.1678	0.0899	0.0218	0.0168	0.0001
1		0.3570	0.3826	0.3892	0.3691	0.3355	0.2527	0.1071	0.0896	0.0012
2		0.1087	0.1488	0.1684	0.2646	0.2936	0.3108	0.2297	0.2090	0.0100
3		0.0189	0.0331	0.0416	0.1084	0.1468	0.2184	0.2815	0.2787	0.0467
4		0.0021	0.0046	0.0064	0.0277	0.0459	0.0959	0.2157	0.2322	0.1361
5		0.0001	0.0004	0.0006	0.0045	0.0092	0.0270	0.1058	0.1239	0.2541
6		0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0011	0.0047	0.0324	0.0413	0.2965
7		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0057	0.0079	0.1977
8		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0007	0.0576

Lösungen:

P(X=1) = P(1) = 0.3892

P(X≤2) = P(0) + P(1) + P(2) = 0.3937+0.3892+0.1684 = 0.9513

Aufgabe 2.b mit Binomialverteilung

Aufgabe 2.b:

Eine Gruppe von 10 Studenten von der Universität Kiel und 15 Studenten der Universität Flensburg haben sich für 5 Arbeitsplätze beworben. Fünf Studenten werden per Zufall ausgewählt. Wie wahrscheinlich ist es, dass

b. Maximal 3 Studenten von der Universität Kiel ausgewählt werden (Ein Student kann mehrmals für einen Arbeitsplatz ausgewählt werden).

B={Maximal 3 Studenten von der Universität Kiel werden ausgewählt}

P(B) = ?

Experiment wird mit Zurücklegen durchgeführt → Binomialverteilung kann benutzt werden um die Aufgabe effizient zu lösen. Man kann die Aufgabe auch wie in 2.a lösen. Diese Lösung ist aber sehr Aufwendig.

Aufgabe 2.b mit Binomialverteilung

Aufgabe 2.b:

B={Maximal 3 Studenten von der Universität Kiel werden ausgewählt}

P(B) = ?

Hier geht es darum wie viele Kieler ausgewählt werden, also zählen wir „Kieler“ (Erfolge) für max. 5 Arbeitsplätze (n=5). Man kann also, folgende Binomial verteilte Variable definieren:

X: Anzahl der Kieler die ausgewählt werden für 5 Arbeitsplätze.

$X \sim B(n=5, p=P(\text{Kieler}) = 10/25 = 0.4) \rightarrow X \sim B(5, 0.4)$

X nimmt folgende Werte an: 0 (0 Kieler werden ausgewählt) bis 5 (alle ausgewählte Studierenden sind Kieler).

Aufgabe 2.b mit Binomialverteilung

Aufgabe 2.b:

B={Maximal 3 Studenten von der Universität Kiel werden ausgewählt}

P(B) = ?

X: Anzahl der Kieler die ausgewählt werden für 5 Arbeitsplätze.
$X \sim B(5,0.4)$

Das heißt:

$P(B) = P(X=0 \text{ oder } X=1 \text{ oder } X=2 \text{ oder } X=3)$
$P(B) = P(X=0 \cup X=1 \cup X=2 \cup X=3)$
$P(B) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

Aufgabe 2.b mit Binomialverteilung

Aufgabe 2.b:

B={Maximal 3 Studenten von der Universität Kiel werden ausgewählt}

P(B) = ?

X: Anzahl der Kieler die ausgewählt werden für 5 Arbeitsplätze.

$X \sim B(5{,}0.4)$

$P(B) = \underbrace{P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)}$

n	5					*p*			
k	**0,08**	**0,09**	**0,1**	**0,15**	**0,2**	**0,25**	**0,3**	**0,4**	**0,5**
0	0,6591	0,6240	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,0778	0,0313
1	0,2866	0,3086	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,2592	0,1563
2	0,0498	0,0610	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3456	0,3125
3	0,0043	0,0060	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,2304	0,3125
4	0,0002	0,0003	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0768	0,1563
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0102	0,0313

$P(B) = 0.0778+0.2592+0.3456+0.2304 = 0.913$

Unabhängige Ereignisse

Aufgabe 3:

Für eine bestimmte Gruppe von Studierenden werden die Anteile bestandener und nicht bestandener Klausuren nach Geschlecht in der Tabelle gezeigt:

	Bestanden	**Durchgefallen**
Mann	24%	16%
Frau	36%	24%

Ein Studierender wird zufällig ausgewählt. Definieren Sie die Ereignisse **A**={Ausgewählter Student hat bestanden} und **B**={Ausgewählter Student ist männlich}. Sind A und B unabhängig voneinander? Sind „Nicht-A“ und B unabhängig voneinander?

Unabhängige Ereignisse

Aufgabe 3 - Lösung:

„Nicht-A (A^c)“ und B sind unabhängig voneinander wenn:

$$P(A^c \cap B) = P(A^c) * P(B)$$

Von der Tabelle haben wir:

	Bestanden	Durchgefallen
Mann	24%	16%
Frau	36%	24%

$P(B) = 0.24 + 0.16 = 0.4$

$P(A^c) = P(\text{Durchgefallen}) = 0.16 + 0.24 = 0.4$

$P(A^c \cap B) = 0.16$

Also $P(A^c) * P(B) = 0.4*0.4 = 0.16 = P(A^c \cap B)$ → **A^c und B sind unabhängig voneinander .**